CAPÍTULO III

TOMADA DE DECISÃO COM INCERTEZA E RISCO

Tomada de Decisões

- Primeiro Passo

    i. Identificar decisões alternativas.

    ii. Identificar consequências possíveis.

    iii. Identificar acontecimentos incertos.

    iv. Identificar estados possíveis.

- Segundo Passo:

    a) Valorar consequências ou estados associados com

    Decisões
    Acontecimentos incertos

- Terceiro Passo:

    Associar probabilidades aos estados possíveis associados a acontecimentos incertos.

Decisões com Incerteza

Neste caso só os primeiro e segundo passos interessam.

Alguns critérios de escolha (segundo passo):

1. Optimista – maximizar o lucro máximo (Maximax)

2. Pessimista – maximizar o lucro mínimo (Maximin)

3. Savage – combinação dos dois critérios anteriores:

   - Escolhe-se um factor de optimismo.
   - Calcula-se o lucro ponderado.

     $\alpha \times$(lucro máximo)+(1- α)$\times$(lucro mínimo).
   - Escolher a alternativa que maximiza o lucro ponderado.

4. Menor custo de oportunidade

   - Calcular o custo de oportunidade para cada decisão.
   - (lucro da melhor decisão) – (lucro da decisão em causa)
   - Escolher a decisão associada ao menor custo de oportunidade

Decisões com Risco

Alguns critérios de escolha (segundo passo):

1. Valor esperado
    - Decisões que se repetem
    - Decisões únicas, mas que representam uma pequena parte do todo
    - Neutro em relação ao risco
2. Utilidade Esperada
    - Utiliza valores adimensionais
    - Permite considerar diversos factores
    - Permite incorporar a atitude em relação ao risco

Determinação das Probabilidades (terceiro passo):

1. Perguntar directamente
2. Confrontar o agente de decisão com apostas até encontra uma que envolve montantes (a ganhar ou perder) que o torne indiferente ao resultado da aposta.
    - Arranjar uma aposta onde um dos lados é nitidamente favorecido.
    - Arranjar uma outra onde o outro lado é favorável.
    - Repetir este processo até os valores convergirem.

3. Comparar duas lotarias com os mesmos benefícios associados (A e B). Uma dependente do resultado do acontecimento incerto em causa. A outra tem probabilidades p e 1-p (lotaria de referência).

   - Usar um valor p_1 qualquer.
   - Se a de referência é melhor p_1 é demasiado elevado escolhe-se $p_2 < p_1$.
   - Caso contrário p_1 é demasiado baixo escolhe-se $p_2 > p_1$.
   - Prosseguir até encontrar p para o qual é indiferente.

4. Modelos de Probabilidades

   Identificar as características do acontecimento incerto.

   Identificar a distribuição que se reveja nelas.

   Encontrar parâmetros de ajuste aos valores por via directa.

5. Informação Histórica

6. Simulação

7. Probabilidades Revistas (Informação Adicional)

   - Recolha de informação adicional
   - Cálculo das probabilidades condicionadas
   - Cálculo das probabilidades conjuntas
   - Cálculo das probabilidades totais
   - Cálculo das probabilidades à posteriori

Exemplo

No início de 1984, duas empresas petrolíferas (Pennzoil e Getty Oil) decidiram fundir-se. Mas antes de qualquer documento ter sido assinado uma terceira empresa surge em cena. A Texaco ofereceu um preço substancialmente melhor e Gordon Getty, que controlava a maior parte da empresa, desfez o negócio com a Pennzoil e vendeu à Texaco.

A Pennzoil sentiu-se lesada e como tal decidiu por um processo, em tribunal, à Texaco alegando que esta tinha ilegalmente interferido no negócio Pennzoil-Getty. No fim do ano de 1985 a Pennzoil ganhou o processo e foi-lhe concedida uma indemnização no valor de 11.1 biliões de dólares (a maior indemnização alguma vez atribuída nos estados unidos até à referida data). A Texaco recorreu da sentença e consegui que esta fosse reduzida para 2 biliões de dólares, mas juros e penalizações fizeram com que o total fosse 10.3 biliões de dólares.

O CEO da Texaco disse que se tivesse de pagar alegaria falência. Além disso, estava disposto a levar a situação ao tribunal supremo alegando que a Pennzoil não tinha seguido as normas regulamentadas pela “Security and Exchange Commission” durante as negociações com a Getty Oil.

Em abril de 1987 a Texaco propos à Pennzoil um pagamento de 2 biliões de dólares. O CEO da Pennzoil acha que um pagamento entre 3 e 5 biliões de dólares é justo.

O que deve o CEO da Pennzoil fazer? Quais são as suas opções?

Deve aceita os 2 biliões de dólares? Ou deve fazer uma contraproposta?

Se recusar então tem de enfrentar uma situação com risco.

A Texaco pode concordar em pagar 5 biliões (um valor aceitável na opinião do CEO da Pennzoil).

Logo parece-lhe razoável recusar e contrapropor um valor de 5 biliões. Se a Texaco não aceitar então talvez contraproponha o valor de 3 biliões ou então continua com o processo em tribunal.

Representação do problema da Pennzoil através de uma árvore de decisão.

Questões

- Será a maximização do dinheiro a receber o único objectivo?
- Que valores, além de 5 biliões de dólares, se podem contrapropor?
- Que valores, além de 3 biliões de dólares, pode a Texaco contrapropor?
- Será que não faz sentido voltar a negociar o valor da indemnização depois da Texaco fazer uma contraproposta?
- Que valores para a indemnização é que o tribunal pode atribuir?
- Não é necessário incluir a hipótese de falência?

Para podermos resolver o problema falta-nos atribuir probabilidades aos estados possíveis para os acontecimentos incertos.

Vamos supor que há 50% de hipóteses de a Texaco se recusar a negociar (já que ambos os CEOs são considerados duros). Além disso vamos admitir que há 17% de hipóteses da Texaco pagar os 5 biliões e 33% de contrapropor um valor de 3 biliões.

Ficam então a faltar as probabilidades associadas às decisões do tribunal. Suponhamos que há 20% de hipóteses da Pennzoil ganhar (já ganhou uma vez) e um valor um pouco maior, 30% de perder (justificado por um comentário feito pelo CEO da Pennzoil à Fortune). Então há 50% de probabilidade de a pena ser reduzida para 5 biliões de dólares.

Resolução da árvore e determinação da solução.

Epílogo

Em Abril de 1987 Pennzoil recusou os 2 biliões de dólares oferecidos pela Texaco.

Poucos dias depois a Texaco então declarou falência.

No Verão 1987 a Pennzoil, sendo o maior credor, entregou um plano de reorganização financeira para a Texaco. Segundo este plano a Pennzoil receberia aproximadamente 4.1 biliões de dólares.

Em Dezembro de 1987 as duas companhias finalmente chegaram a acordo, a Texaco pagou 3 biliões de dólares à Pennzoil.

Dominância

Se se verificar permite eliminar algumas alternativas.

Para a analisar usam-se os perfis de risco acumulado de cada uma das alternativas.

Há dois tipos de dominância:

1. Determinista

2. Estocástica

Objectivos Múltiplos

1. Análise do valor esperado dos diversos objectivos (um de cada vez).

2. Mesmo que alguma alternativa seja pior em todos os objectivos não é evidente que possa ser eliminada, pois há ainda a questão do risco.

3. Valoração dos diversos objectivos/atributos numa escala adimensional.

4. Obtenção do benefício global por agregação do benefício associado a cada objectivo.

5. Análise do valor esperado e risco do benefício global.

Exemplo

Um estudante tem as seguintes duas hipóteses para um emprego de verão:

Trabalhar numa loja na cidade onde vive, recebendo um salário de 2730, 2320 ou 2047 euros dependendo das vendas conseguidas, não sendo necessário trabalhar aos fins-de-semana.

Trabalhar numa equipa de manutenção florestal, recebendo 2600 euros. A equipa é constituída por outros estudantes que podem vir de qualquer parte do país. Os fins-de-semana não são livres e não há a possibilidade de conviver com outras pessoas que não as que integram a equipa.

O estudante tem dois objectivos: maximizar a remuneração e o divertimento durante os meses de verão. Sabe-se ainda que este identificou cinco níveis de diversão possíveis para o emprego florestal e que ficar na cidade onde vive proporcionará divertimento com nível 3.

Suponhamos que o estudante determinou as seguintes probabilidades para os acontecimentos incertos do seu problema.

Objectivo	Nível	Probabilidade
Diversão	5	10%
	4	25%
	3	40%
	2	20%
	1	5%
Salário	2730	35%
	2320	50%
	2047	15%

a) Desenhe a árvore de decisão deste problema.
b) Analise as soluções alternativas considerando factores de ponderação 70 e 30 para o salário e diversão respectivamente. Haveria alguma diferença se estes fossem 60 e 40.

Função Utilidade

É utilizada, pois é necessário modelizar o risco devido:

- Aos compromissos envolvidos na tomada de decisão
- Ás diferentes atitudes perante risco

Permite:

- Comparar objectivos diferentes já que:
  - É adimensional
  - Pode ser normalizada, pois o seu valor absoluto não tem nenhum significado, $V(x)=aU(x)+b$
- Comparar decisões alternativas recorrendo à utilidade esperada

Formalmente:

A função utilidade U satisfaz as seguintes condições:

$U: IR \rightarrow IR$

U é continua e crescente

A natureza de atitude em relação ao risco define o tipo da função utilidade.

Tipo de Função Utilidade:

- Côncava

  $U[\alpha x+(1-\alpha)y] \geq \alpha U(x)+(1-\alpha)U(y)$ onde $\leq \alpha \leq 0$

  A semi-recta que une dois pontos da função tem de estar sobre a função ou abaixo da mesma

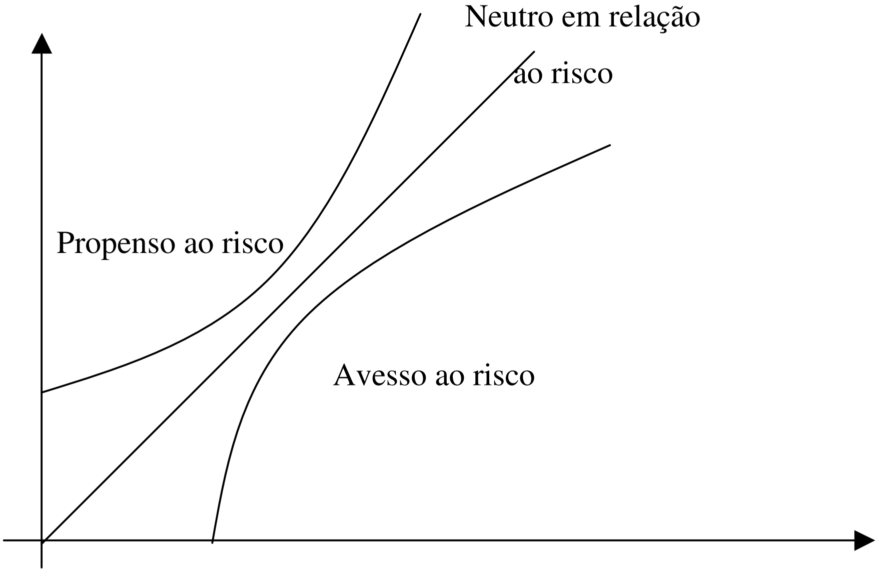
  Estritamente côncava representa uma atitude de aversão ao risco

- Linear

  Não tem em consideração o risco, logo representa uma atitude neutra em relação ao risco

- Convexa

  Reflecte uma atitude de propensão ao risco



Derivadas

Função utilidade crescente $U'(x) > 0$

Função utilidade estritamente côncava $U''(x) < 0$

Coeficiente de aversão ao risco $a(x) = -U''(x) / U'(x)$

Equivalente Garantido

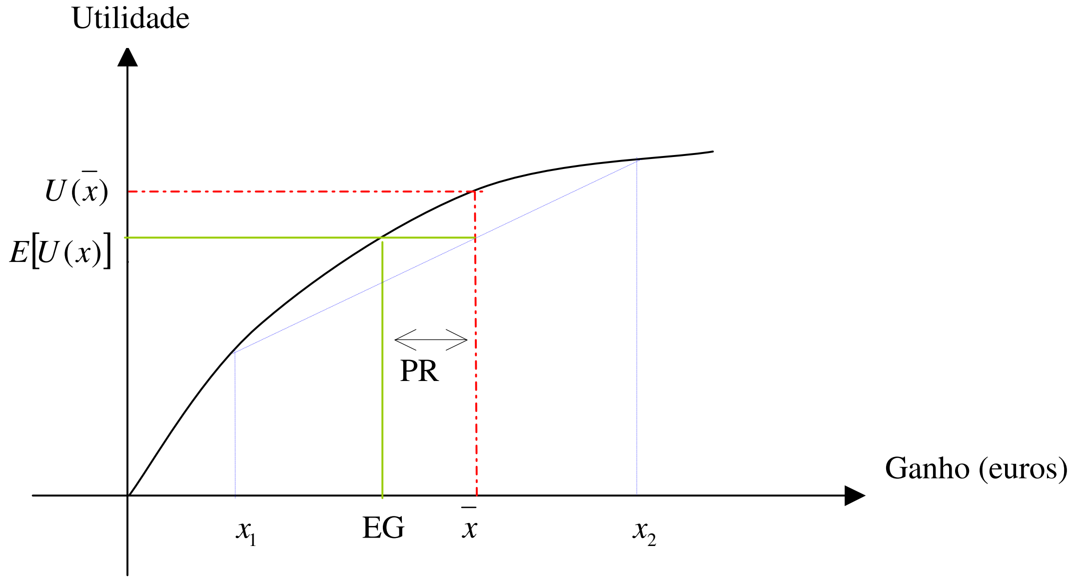
O equivalente garantido (EG) de uma variável aleatória (x) é definido como a quantia garantida (sem risco) cujo valor de utilidade é igual à utilidade esperada da variável aleatória

$$U(EG) = E[U(x)]$$

Prémio de Risco

Corresponde ao valor que estamos dispostos a pagar (em termos de oportunidade perdida) para eliminar o risco

Prémio de Risco = Valor Esperado – Equivalente Garantido



PR > 0, PR < 0, PR=0

Determinação da Função Utilidade

Directamente (Equivalente Garantido/Probabilidades)

O agente de decisão atribuiu um valor ao equivalente garantido (probabilidade) associado(a) a cada uma das alternativas com risco.

Seleccionar dois valores de riqueza fixos, *A* e *B*. Propor ao agente de decisão um jogo onde este pode ganhar o valor *A* com probabilidade *p* e o valor *B* com probabilidade *1-p*. O agente de decisão é questionado quanto ao valor *C* de riqueza garantida (ou *p* de probabilidade) que aceitaria em troca do jogo descrito, para diversos valores de *p* (diversos valores de *C*).

Se o agente de decisão for avesso ao risco $C < p A + (1-p) B$.

Família de Parâmetros

A função utilidade é representada por uma família de funções, sendo necessário determinar o valor do parâmetro ou parâmetros.

Geralmente usa-se a exponencial $U(x)=-e^{-ax}$. O parâmetro *a*, coeficiente de aversão ao risco, pode ser obtido avaliando um jogo recorrendo ao equivalente garantido.

As funções logarítmica e potência também são muito utilizadas, pois têm a vantagem de que o coeficiente de aversão ao risco varia com a riqueza.

Questionário

Uma forma de deduzir o factor de risco e a função utilidade é recorrendo a questionários. Este proporcionam-nos uma boa avaliação qualitativa do agente de decisão.

WHAT'S YOUR INVESTMENT "RQ"—RISK QUOTIENT?

This "Risk Quiz" is intended as a starting point at sessions between a client and a financial planner to help evaluate your tolerance for risk. It shouldn't be used to make specific investment decisions. Even if you haven't experienced a specific situation addressed here, answer based on what you think your decision would be if you faced the issue today.

1. My salary and overall earnings from my job are likely to grow significantly in the coming years.
a) Disagree strongly
b) Disagree
c) Neither agree nor disagree
d) Agree
e) Agree strongly

2. If I were deciding how to invest contributions in my retirement plan, I would choose investments that offered fixed yields and stability.
a) Agree strongly
b) Agree
c) Neither agree nor disagree
d) Disagree
e) Disagree strongly

3. I believe investing in today's volatile stock market is like spinning a roulette wheel in Las Vegas—the odds are against you.
a) Agree strongly
b) Agree
c) Neither agree nor disagree
d) Disagree
e) Disagree strongly

4. *If I were picking a stock to invest in*, I would look for companies that are involved in developing the hot products of the future, such as the next penicillin.
a) Disagree strongly
b) Disagree
c) Neither agree nor disagree
d) Agree
e) Agree strongly

5. If I were selecting an investment for my child's college education fund, I would choose:
a) Certificate of deposit
b) Government-backed mortgage securities or municipal bonds
c) Corporate bonds
d) Stocks equity mutual funds
e) Commodities futures contracts

6. The following number of dependents rely on me for their financial welfare.
a) Four or more
b) Three
c) Two
d) One
e) Only myself

7. The number of years remaining until I expect to retire is approximately:
a) Currently retired
b) Less than 5 years
c) 5–14 years
d) 15–24 years
e) 25 or more

8. My total net worth (the value of my assets less my debts) is:
a) Under $15,000
b) $15,001–$50,000
c) $50,001–$150,000
d) $150,001–$350,000
e) Over $350,000

9. The amount I have saved to handle emergencies, such as a job loss or unexpected medical expenses, equates to:
a) One month's salary or less
b) Two to six months' salary
c) Seven months' to one year's salary
d) *One to two years' salary*
e) More than two years' salary

10. I would rather invest in a stock mutual fund than buy individual stocks because a mutual fund provides professional management and diversification.
a) Agree strongly
b) Agree
c) Neither agree nor disagree
d) Disagree
e) Disagree strongly

11. I want and need to reduce the overall level of debt in my personal finances.
a) Agree strongly
b) Agree
c) Neither agree nor disagree
d) Disagree
e) Disagree strongly

12. When making investments, I am willing to settle for a lower yield if it is guaranteed, as opposed to higher yields that are less certain.
a) Strongly agree
b) Agree
c) Neither agree nor disagree
d) Disagree
e) Strongly disagree

Scoring System

SCORING: Give yourself one point for every "a" answer, two points for every "b," three points for every "c," four points for every "d" and five points for every "e."

46 AND HIGHER: You probably have the money and the inclination to take risks. High-risk investments include growth stocks, start-up companies, commodities, junk bonds and limited partnerships, as well as stock options and investment real estate. But be sure to diversify at least some of your portfolio into safer investments. Even you could lose everything and regret your high-risk tolerance.

41–45: You have an above-average tolerance for risk and probably enough time and income to cover your losses. Investors in this category are wise to mix high-risk and low-risk options.

36–40: You have an average tolerance for risk, but don't like to gamble. Consider a mix of long-term investments that have a history of strong and steady performance. Blue chip stocks, high-grade corporate bonds, mutual funds and real estate are all possible options.

31–35: You have below-average tolerance for risk, either because of your age or your income and family circumstances. Comfortable investments for you would probably include your home, high-quality bonds, government-backed securities and federally insured savings accounts.

30 and below: You have virtually no tolerance for risk. Look for investments that have government backing, such as bank and thrift certificates of deposit, Treasury bills, bonds and notes.

FIGURE 9.5 Risk quiz. An investor's attitude toward risk and toward type of investment might be inferred from responses to a questionnaire such as this one. Source: *Fidelity Investments,* 1991. Developed in association with Andrew Comrey, Ph.D., Professor of Psychology, University of California at Los Angeles.

Axiomas

Ordenação

Ordem de preferência

Transitividade

Se A1 é preferível a A2

Se A2 é preferível A3

Então A1 é preferível a A3

Redução

Alternativa composta pode ser reduzida a alternativa simples

Continuidade

Jogo com consequências A1 e A2 é equivalente à consequência A garantida (A1 > A > A2)

Substituição

Oposto a redução

Monótono

Entre dois jogos com mesmos ganhos, escolhe-se o que tiver maior probabilidade associada ao maior ganho

Invariância

A preferência depende das consequência e probabilidades

Limites

Não há consequências infinitamente grandes

Paradoxos

Embora geralmente as pessoas concordem com os axiomas expostos nem sempre as preferências ou a decisão tomada está de acordo com os mesmos.

Descrição

A atitude em relação ao risco varia com a descrição do problema.

Suponhamos o aparecimento de uma doença para a qual se estima que resultem 600 mortos. Há dois programas que se podem aplicar no combate à referida doença. Por questões orçamentais só um será implementado.

Programa A (já testado): permite salvar 400 pessoas

Programa B (experimental): Permite salvar toda a gente com 80% de hipóteses mas há 20% de hipótese de que ninguém se salve.

Qual é preferível?

Suponhamos agora que os dois programas eram descritos da seguinte forma:

Programa C: 200 pessoas morrem

Programa D: Com 20% de probabilidade as 600 pessoas morrem e com 80% de probabilidade ninguém morre.

Qual é preferível?

A maior parte das pessoas escolhe o programa A, mas a maior parte das pessoa também escolhe o programa D.

Programas A e B são descritos em termos de ganhos (número de pessoas salvas), enquanto os programas C e D traduzem perdas (número de mortes).

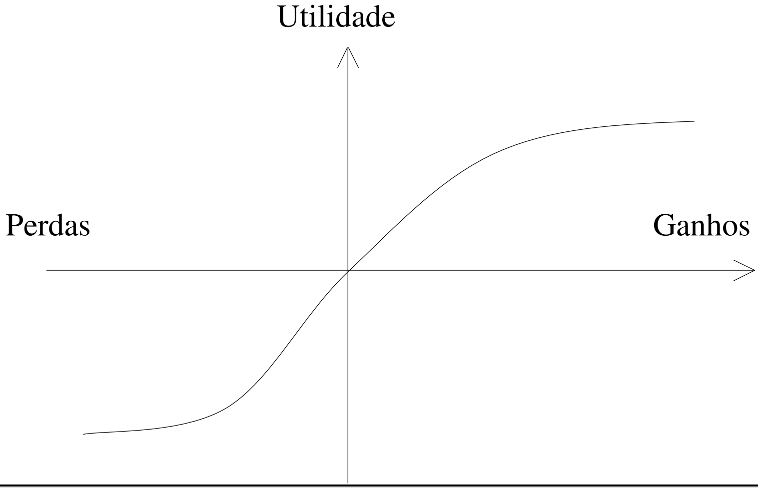
"Desistir de um projecto que não está a correr bem implica a perda de todos os recursos já usados nesse projecto."

Perdas passadas não podem influenciar decisões presentes ou futuras pois afectam todas as alternativas da mesma maneira.

Princípio por de trás deste paradoxo é que a maior parte das pessoas são:

Avessas ao quando lidam com ganhos

Propensas ao risco quando lidam com perdas.



Certeza

Paradoxo de Allais:

Decisão 1

A Ganhar 1 milhão de euros com p = 1

B Ganhar 5 milhões de euros com p1 = 0.10

Ganhar 1 milhão de euros com p2 = 0.89

Ganhar 0 euros com 1 - p1 - p2 = 0.01

Qual a preferível?

Decisão 2

C Ganhar 1 milhão de euros com p = 0.11

Ganhar 0 euros com 1 - p = 0.89

D Ganhar 5 milhões de euros com p = 0.10

Ganhar 0 euros com 1 - p = 0.90

Qual a preferível?

Foram feitas várias experiências:

82% das pessoas preferiu A e 83% preferiu D.

Viola o axioma da invariância:

$U(5)=1$ e $U(0)=0$

$U(A) > U(B) \Leftrightarrow U(1) > 0.1\times U(5)+ 0.89\times U(1) \Leftrightarrow U(1) > 0.1/0.11=0.91$

$U(C) < U(D) \Leftrightarrow 0.11\times U(1) < 0.1\times U(5) \Leftrightarrow U(1) < 0.1/0.11=0.91$

Determinação dos Factores de Ponderação

Taxa de substituição.

Determina-se o valor de um objectivo em termos de outro objectivo (normalmente todos são determinados em função do monetário).

Esse valor (taxa) é obtido encontrando o valor máximo que estamos dispostos a pagar para aumentar uma unidade de benefício do atributo em causa (ou o mínimo a receber se esse aumento for indesejável)

Usando a variação máxima.

Cria-se uma alternativa hipotética com o pior valor para cada atributo

Determina-se a valorização do incremento máximo associado a cada atributo, considerando a variação de um só atributo de cada vez.

Lotarias.

Também se podem usar lotarias para determinar os factores de ponderação.

Neste caso usa-se o jogo de referência para determinar o equivalente probabilístico.

Independência

Independência em termos de preferência,

Independência em termos de utilidade e $\Rightarrow$ Modelo

Independência aditiva.

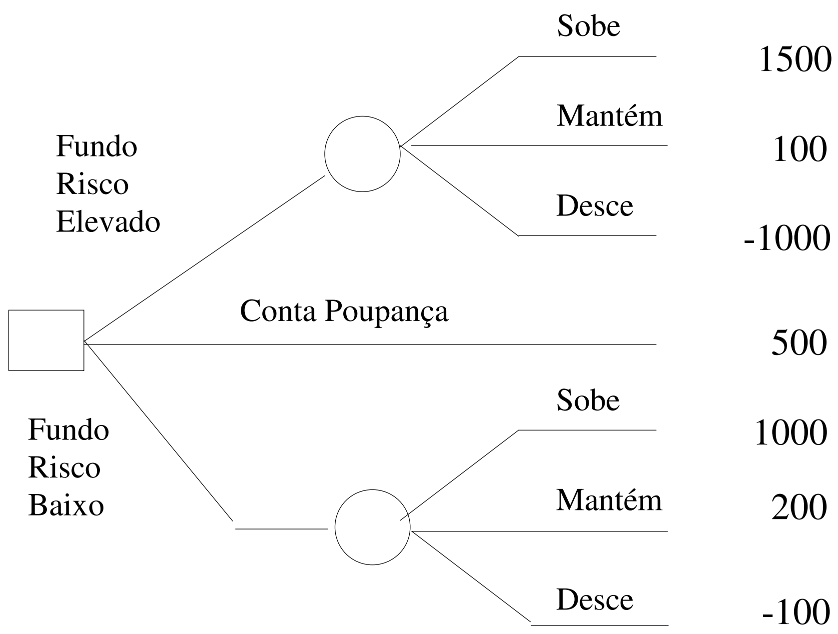
Valoração da Informação

Informação adicional é importante e vantajosa dado lidarmos com problemas com incerteza.

Se tivéssemos acesso ao futuro tomaríamos a decisão correcta sem quaisquer problemas.

Como se pode valorar informação?

Suponhamos que estamos perante um problema de decisão de investimentos. Neste existem dois tipos de investimento: fundo de acções (com rico baixo ou com risco elevado) e conta poupança.



Admitindo que a probabilidade do mercado subir, manter-se ou descer é 50%, 30% e 20%, respectivamente.

O valor esperado associado a cada um dos três investimentos:

Fundo Acções Risco Elevado	Fundo Acções Risco Baixo	Conta Poupança
580	540	500

Se a tomada e decisão for feita usando o critério do valor esperado, deve-se investir no fundo de acções de risco elevado.

Contratar um especialista para obter informação adicional sobe a performance dos mercados.

Se nos disser que o mercado vai subir então a decisão mantém-se

$\Downarrow$

Esta informação não tem valor (a decisão mantém-se).

Se nos disser que o mercado vai descer ou manter-se então a melhor decisão a tomar é investir na conta poupança

$\Downarrow$

Esta informação recebida tem valor, pois conduz a uma alteração na decisão a tomar permitindo aumentar o valor esperado.

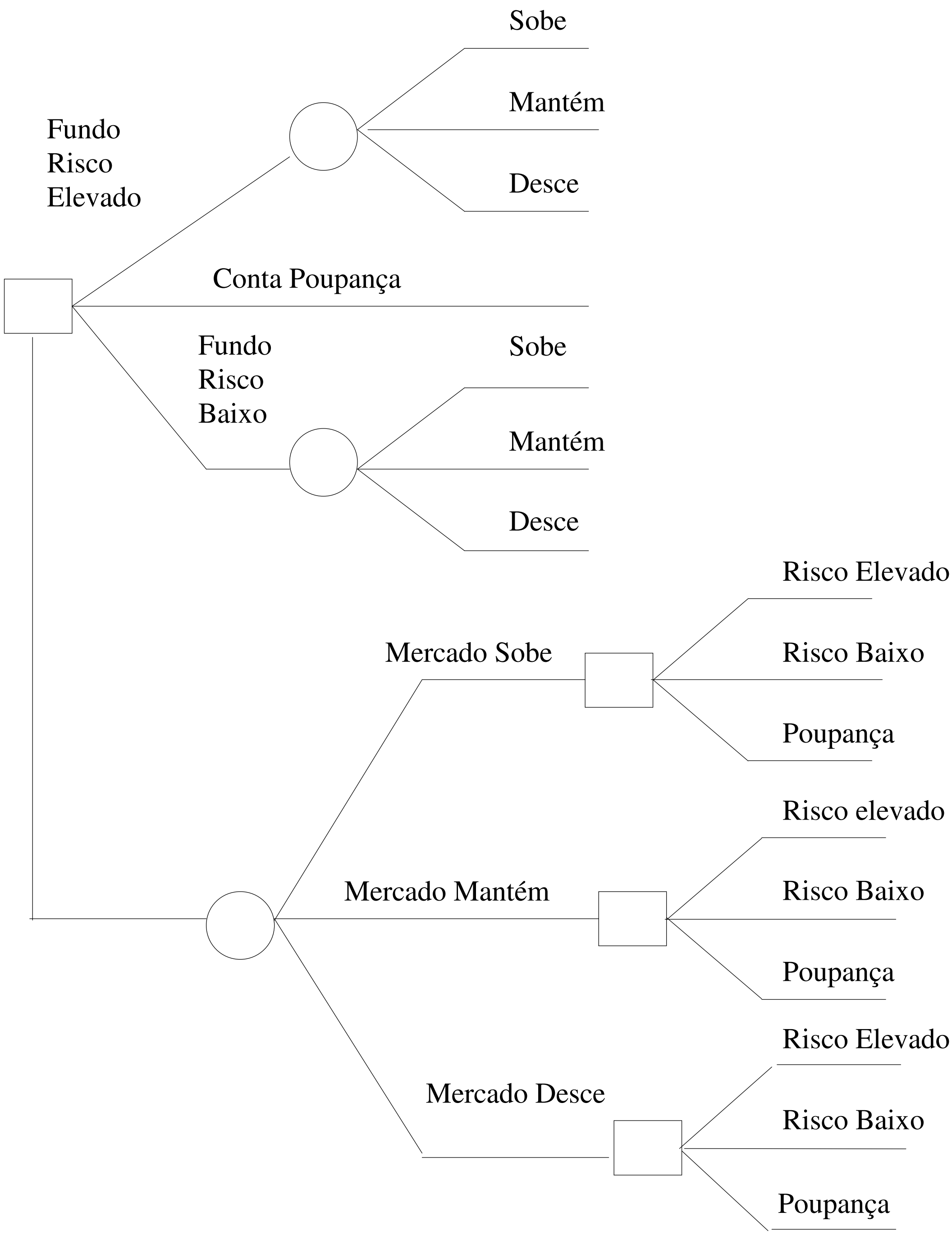
Informação adicional pode

não ter valor se a decisão a tomar não depender da mesma

no limite valer tanto com a informação perfeita.

Informação Perfeita.

Suponhamos que se podia contratar um especialista em análise de mercados e que este nos fornecia informação perfeita. Quanto estaríamos dispostos a pagar ao referido especialista?



Se não tivermos informação perfeita a decisão é fundo de acções com risco elevado e o valor esperado é 480 euros.

Na presença de informação perfeita o valor esperado é 1000 euros. No máximo estamos dispostos a pagar para obtermos informação perfeita 1000 – 580 = 420 euros.

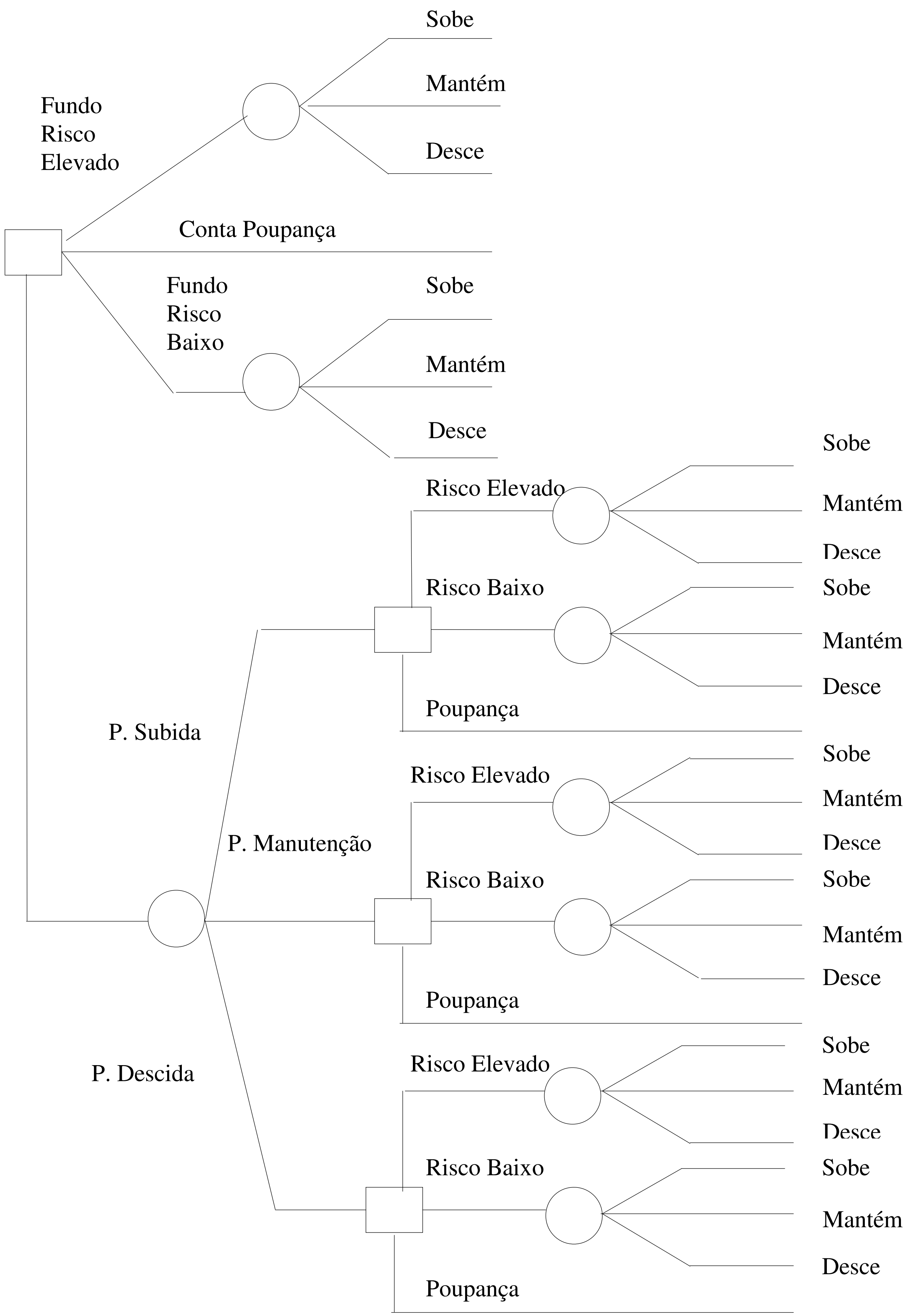
E[IP] = E[Lucro com IP] - E[Lucro sem IP]

Informação Adicional.

Raramente se tem acesso a informação perfeita, mas no entanto é possível obter informação adicional.

Retomando o exemplo da decisão de investimento, é possível contratar um especialista na área. No entanto este está sujeito a erros. Suponhamos que nos estudos de mercado que ele tem realizado se verificou o seguinte

Previsão	Estado real do mercado		
Especialista	Sobe	Mantém	Desce
Sobe	0.80	0.15	0.20
Mantém	0.10	0.70	0.20
Desce	0.10	0.15	0.60


Sobe
Mantém
Desce
Fundo Risco Elevado
Conta Poupança
Fundo Risco Baixo
Sobe
Mantém
Desce
Risco Elevado
Sobe
Mantém
Desce
Risco Baixo
Sobe
Mantém
Desce
Poupança
P. Subida
Risco Elevado
Sobe
Mantém
Desce
P. Manutenção
Risco Baixo
Sobe
Mantém
Desce
Poupança
P. Descida
Risco Elevado
Sobe
Mantém
Desce
Risco Baixo
Sobe
Mantém
Desce
Poupança

Agora é necessário calcular as probabilidades revistas, ou seja as probabilidades condicionadas associadas aos estados finais dadas as previsões:

$P(E_i \mid P_j) = P(P_j \mid E_i) \times P(E_i) / P(P_j)$

$P(P_j \mid E_i)$ avaliação feita às previsões fornecidas pelo especialista

$P(E_i)$ avaliação inicialmente feita ao mercado

$P(P_i)$ probabilidade de o especialista fazer a previsão P_i

$P(P_i) = P(E_1 \text{ e } P_i) + P(E_2 \text{ e } P_i) + ... + P(E_n \text{ e } P_i)$

ou seja

$P(P_i \mid E_1) \times P(E_1) + P(P_i \mid E_2) \times P(E_2) + ... + P(P_i \mid E_n) \times P(E_n)$

Valoração da informação adicional

E[IA] = E[Lucro com IA] - E[Lucro sem IA]

Eficiência da informação adicional

Eficiência = Acréscimo lucro IA / Acréscimo lucro IP × 100%

Probabilidades condicionais (associadas à qualidade da informação)

$P(P_i|E_j) =$

	P_1	P_2	P_3
E_1	0.80	0.10	0.10
E_2	0.15	0.70	0.15
E_3	0.20	0.20	0.60

Probabilidades à priori (conhecidas): $P(E_1)$, $P(E_2)$ e $P(E_3)$.

Probabilidades conjuntas, obtidas multiplicando cada linha pela probabilidade de estado correspondente.

$P(E_j,P_i) =$

	P_1	P_2	P_3
E_1	0.5*0.80=0.400	0.5*0.10=0.050	0.5*0.10=0.050
E_2	0.3*0.15=0.045	0.3*0.70=0.210	0.3*0.15=0.045
E_3	0.2*0.20=0.040	0.2*0.20=0.040	0.2*0.60=0.120
	0.485	0.300	0.215

As probabilidades de previsão $P(P_j) = \sum_i P(E_i, P_j)$.

Probabilidades à posteriori $P(E_i \mid P_j) = {P(E_i, P_j)}\big/{P(P_j)}$

P(Ej,Pi) =

	P_1	P_2	P_3
E1	0.8247	0.1667	0.2326
E2	0.0928	0.7000	0.2093
E3	0.0825	0.1333	0.5581