

*Interacção estratégica e aleatoriedade - Aplicação ao
controlo de qualidade*

Pedro Cosme da Costa Vieira

Fac. de Economia do Porto e Liacc

Resumo: Na generalidade dos estudos de controlo de qualidade considerados na literatura, é assumido que o "processo de controlo" é efectuado pelo mesmo agente económico responsável pelo "processo de fabrico". No meu trabalho, utilizando programação dinâmica, formalizo um modelo de mercado competitivo em que é transaccionado um bem ou serviço caracterizado pela qualidade e pelo preço e em que os "vendedores" decidem o processo de fabrico e os "compradores" controlam a qualidade e preço do bem ou serviço vendido. Deste modo, estudo se a aleatoriedade quanto à qualidade poderá resultar da interacção entre os agentes que decidem o "processo de fabrico" em comportamento estratégico contra os agentes que "controlam o resultado desse processo" e não como resultado de um "processo de fabrico" estocástico.

Palavras-chave: Decisão óptima, Programação dinâmica estocástica, Search, Interacção estratégica, Controlo de qualidade, Concorrência

Abstract: The studies of quality control considered in the literature assume that the "process of manufacturing" is done by the same person that implements the "politics of control". In our work, using dynamic programming, we present a model of a competitive market with a good or service characterised by quality and price in which the agent who decides the "process of manufacturing" has strategic behaviour against the agent who "controls the result of the process". In this way, we investigate if random quality results just from the strategic interaction of "sellers" against "buyers".

AMS Classification: 49L20, 65C60, 65K10, 91A06, 91A90.

1 Introdução

Por norma, nos problemas de decisão óptima em que uma das variáveis relevantes é aleatória, é pressuposto que essa variável segue uma função de distribuição que é exógena a esse problema de decisão.

Num contexto em que a informação sobre a qualidade de um bem ou serviço é imperfeita e assimétrica e em que o agente que decide o "processo de fabrico" não é o mesmo que "controla a qualidade" que daí resulta, será de equacionar em que condições surgirão situações de aleatoriedade na variável controlada em resultado apenas de uma decisão deliberada do agente responsável pelo "processo de fabrico" em comportamento estratégico contra os agentes que "controlam" a qualidade e não de o próprio processo de fabrico ser estocástico.

Na procura das condições necessárias para que do comportamento estratégico resulte aleatoriedade, no trabalho que apresento formalizo um modelo de mercado concorrencial em que, por um lado, existem "compradores - controladores" que pretendem consumir um fluxo constante de um determinado bem ou serviço caracterizado pelo preço e pela qualidade e, por outro lado, existem "vendedores - controlados" que pretendem fornecer esse bem ou serviço. Assumido que produzir esse bem ou serviço com mais qualidade implica um maior custo de produção, os "vendedores" pretenderão minimizar a qualidade do bem e maximizar o seu preço, em termos esperados, enquanto que aos "compradores" interessará exactamente o contrário.

Os resultados que encontro, apesar de, na minha opinião, não serem satisfatórios por não se observarem, como pretendia, situações com aleatoriedade, estão de acordo com Akerlof(1970) e Diamond(1971).

2 Pressupostos do modelo

Em termos genéricos, no meu trabalho considero que existe um mercado concorrencial de um bem ou serviço com vendedores e compradores. Esse bem ou serviço, que denomino por apenas bem, é caracterizado por uma qualidade e um preço que são afixados por cada vendedor de forma individual.

Produzir com maior qualidade implica um custo maior pelo que os vendedores maximizam o seu lucro se venderem o bem com baixa qualidade e preço elevado.

O interesse dos compradores é contrário ao dos vendedores, maximizando a sua função objectivo se adquirirem o bem com qualidade elevada e preço baixo.

Em termos mais detalhados, considero os seguinte pressupostos:

H1 - Cada vendedor tem q como custo de produção do bem, que também traduz a qualidade, vendendo-o ao preço p , procurando como objectivo maximizar o valor esperado da função lucro que traduz a diferença $p - q$.

H2 - Cada comprador tem como objectivo minimizar o valor esperado da função custo que traduz a diferença $p - q$, em que, como em H1, q é a qualidade e p é o preço do bem.

H3 - O processo produtivo é determinístico, permitindo produzir com a qualidade pretendida.

H4 - O tempo está dividido em períodos regulares.

H5 - No início de cada período, cada comprador fica a conhecer a qualidade q e preço p de um vendedor escolhido de forma aleatória.

H6 - Em função da qualidade e do preço observados, o comprador faz um contrato com esse vendedor para o fornecimento durante n períodos .

H7 - O horizonte temporal está limitado a h períodos (o caso com horizonte temporal infinito é uma situação limite).

H8 - Um comprador consome uma unidade do bem intermédio por período.

Os pressupostos H1 e H2 implicam que o relevante para agentes económicos é a diferença $c = p - q$, o pressuposto H5, de apenas ser conhecido o valor c de

um vendedor por período, introduz um "custo de pesquisa" e o pressuposto H6 é equivalente a considerar a constituição de um stock mas é mais geral porque se pode aplicar ao fornecimento de serviços.

3 Formalização do modelo

O fenómeno económico subjacente ao problema que estudo consiste na afectação óptima intertemporal de recursos escassos que tem como modelo base Ramsey (1928) e tem um tratamento vasto na literatura económica. Bellman (1957) deu um tratamento recursivo a esse problema tipo, que ficou conhecido por Programação Dinâmica, sendo que Stokey e Lucas (1989) fazem uma síntese do uso de modelos recursivos em Economia. A decisão do "comprador" resulta de um problema de pesquisa, *search*, de que Lippman e McCall (1976) é uma revisão da literatura.

A decisão do comprador é sob incerteza em que existe assimetria na informação. Assim, um vendedor particular sabe qual é a qualidade q e o preço p que afixa mas o comprador apenas sabe, *a priori*, que ele pertence a uma população, de forma que a diferença $c = q - p$ é assumida como uma extracção aleatória independente.

3.1 Duração óptima do contrato a fazer pelo comprador no período corrente

Denominando por $v(c, s, h)$ a função custo esperado incorrido por um comprador para satisfazer as suas necessidades de consumo até ao fim do horizonte temporal h , quando no período corrente lhe é proposto um fornecimento com "custo" c , e a soma de todos os contratos anteriormente celebrados e já pagos permitem o consumo nos s períodos seguintes, então a quantidade óptima a contratar no período corrente, n , será tal que minimize esse "custo" esperado:

$$v(c_t, s, h) = \underset{n}{\text{Min}} \{c_t n + v(C_{t+1}, s + n - 1, h - 1)\} \quad (1)$$

Nesta expressão, $v(c_t, s, h)$ traduz o "custo" esperado relativamente a uma série de valores extraída do vector de variáveis aleatórias $\{C_i\}_{i=t+1, \dots, t+h}$ a qual traduz a sequência de "custos" que serão observados em todos os períodos futuros, e que, no instante presente, são desconhecidos. Podemos alterar a forma da expressão anterior explicitando o operador "esperança matemática" considerando, sem perda de generalidade, que essas variáveis aleatórias têm f.d.p. contínua (a expressão considera todos os períodos futuros por ter forma recursiva):

$$v(c_t, s, h) = \underset{n}{\text{Min}} \left\{ c_t n + \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, s + n - 1, h - 1) f_{C,t}(x) dx \right\} \quad (2)$$

O estudo do comportamento óptimo do comprador em análise obtém-se directamente da equação anterior que apenas pode ser manipulada com recurso a métodos numéricos. Assim, adopto um algoritmo iterativo em que se parte de uma situação estacionária em que as f.d. das variáveis aleatórias A_i e A_j , para quaisquer períodos i e j , são idênticas e iguais a $F_C(c)$.

Em termos de análise de estática comparada, a duração $n(c, s, h)$ do contrato a celebrar por um qualquer comprador com o vendedor que lhe propôs no período corrente o "custo" c , tem as seguintes propriedades:

P1 - É decrescente com o "custo" c conhecido no período corrente (crescente com a qualidade q e decrescente com o preço p) e com a duração total s dos fornecimentos já anteriormente contratados.

P2 - Se o "custo" c for menor que um determinado custo de reserva c^* , que é menor que $E[c]$ se $h > 1$, então o comprador contrata esse fornecedor para todo o horizonte temporal h . Esse custo de reserva é crescente no decurso do tempo.

P3 - A quantidade contratada no período corrente é linear e aditiva na quantidade em stock, $n(c, s, h) = n(c, 0, h) - s$, excepto na solução de canto $n = 0$.

No sentido de ilustrar as propriedades P1, P2 e P3, apresento nas duas figuras seguintes a função procura de um comprador particular referente ao período corrente, numa simulação em que o "custo" é uma extracção independente da f.d. uniforme no conjunto $[10, 20]$.

Na figura 1, apresento o comportamento dessa função procura considerando diferentes horizontes temporais, $n(c, h)$, com s igual a zero.

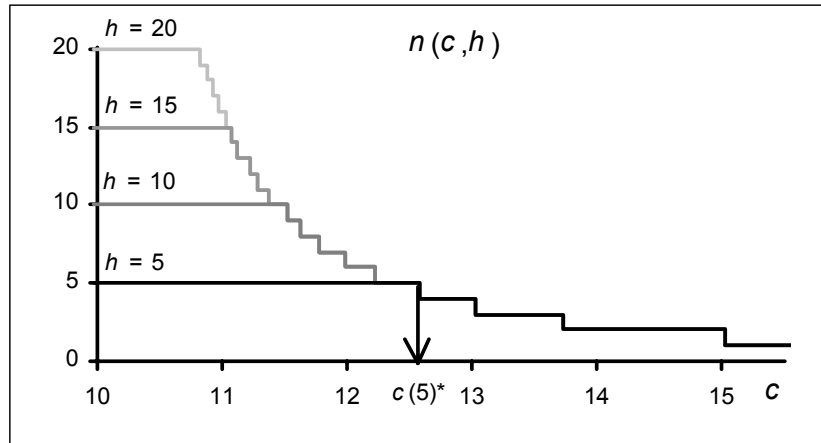


Figura 1: Duração do contrato em função do "custo" e do horizonte temporal

Na segunda 2, apresento o comportamento de um comprador no período corrente para vários valores de s , $n(c, s)$, considerando que o horizonte temporal

é de 20 períodos.

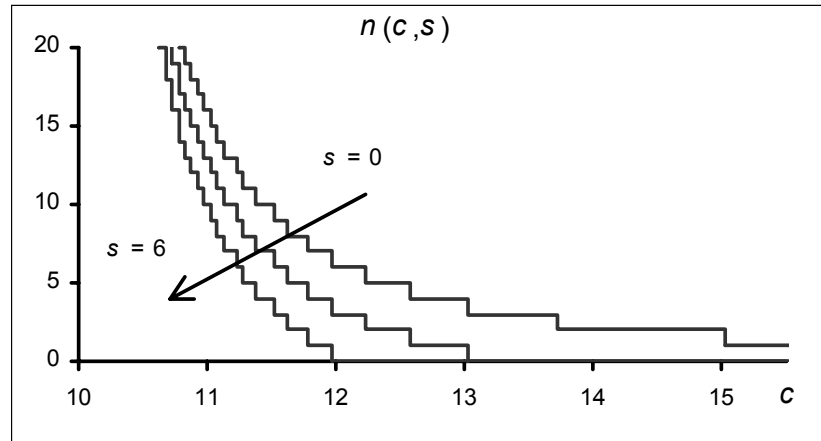


Figura 2: Duração do contrato em função do "custo" e da quantidade anteriormente contratada

3.2 Qualidade e preço óptimos a afixar por um vendedor dada a estratégia dos compradores

Neste ponto, determino a "outra metade" da iteração numérica que consiste em verificar se a f.d. $F_C(c)$ considerada como ponto de partida, depois de quantificada a resposta dos compradores no ponto anterior, é compatível com a maximização do lucro esperado dado pelo produto da quantidade esperada vendida por c , $E[q(c)]c$.

A decisão do vendedor é determinada sob incerteza em que existe assimetria de informação porque um comprador particular sabe qual é a qualidade s que contratou anteriormente mas o vendedor, para quem esta variável é relevante por influenciar a quantidade que o comprador vai adquirir, apenas sabe que ele pertence a uma população, sendo s assumido como uma extracção independente da f.d. $F_S(s)$.

A função procura esperada de um vendedor particular corresponde a uma situação de *stationary equilibrium* em que continuamente entram compradores para substituir os que vão abandonando o mercado. Nesta situação, a quantidade esperada vendida a um dado preço corresponde ao integral no "espaço de tipos de compradores" referente ao período corrente. No entanto, o integral no "espaço de tipos" é algebricamente equivalente ao integral no tempo referente a

apenas um qualquer comprador, considerando todo o horizonte temporal, Axell(1977). Assim sendo, na sua determinação considero as quantidades que um comprador decide "contratar", período a período, calculadas de forma recursiva.

Como já apresentei, um comprador que conheça no período corrente o "custo" c de um dado vendedor quando o horizonte temporal é de h períodos e já tem contratados fornecimentos para s períodos, contrata fornecimentos para $n(c, s, h)$ períodos.

Como o vendedor que dá a conhecer o seu "custo" desconhece o valor de s do comprador particular, considera a sua função distribuição na população de compradores, que denomino por $F_S(s|h)$, determinável a partir da f.d. $F_C(c)$ dos "custos" que é pressuposto ser conhecida de forma pública e perfeita:

$$F_S(s|h) = \text{Pr ob} \{n(c_1, s_1, h+t) + \dots + n(c_{t-1}, s_{t-1}, h+1) + s_1 - t \leq s\} \quad (3)$$

Então, a função procura esperada de um vendedor particular, referente apenas ao período corrente $E[q_h(c)]$, vem dada pela expressão seguinte:

$$E[q_h(c)] = \sum_{s=0}^{\infty} n(c, s, h) f_S(s|h) \quad (4)$$

Considerando, sem perda, que as quantidades de compradores e de vendedores estão normalizadas à unidade, então a correspondente função lucro esperado em *stationary equilibrium* vem dada pela expressão seguinte:

$$E[\pi(q, p)] = E[\pi(c)] = c E[q(c)] = c \sum_{h=1}^t \left(\sum_{s=0}^{\infty} n(c, s, h) f_S(s|h) \right) \quad (5)$$

A expressão (5) traduz a resposta estratégica dos vendedores ao comportamento dos compradores considerando apenas uma iteração. Desta expressão, que tem que ser manipuladas com recurso a métodos numéricos, resultam, em termos de análise de estática comparada, as seguintes propriedades para o comportamento dos vendedores:

P4 - A função procura esperada é uma função decrescente com c .

Como, da propriedade P1, a função procura de um comprador individual $n(c, s, h)$ é decrescente com c , então a procura esperada de um vendedor particular também é decrescente por corresponder a uma soma ponderada de funções decrescentes.

P5 - A função procura esperada tem valor positivo para todos os valores com suporte na função distribuição dos preços, domínio da f.d. $F_A(a)$, porque existe a possibilidade de um comprador ter esgotado o prazo dos fornecimentos anteriormente contratados, $s = 0$.

P6 - A função lucro esperado é em forma de serra e globalmente decrescente sendo que o lucro máximo corresponde ao "custo de reserva" c^* dos compradores no período corrente.

No sentido de ilustrar as propriedades P4, P5 e P6, apresento nas duas figuras seguinte o comportamento da função procura esperada e da função lucro esperado de um vendedor, numa simulação em que o horizonte temporal é de 10 períodos e o "custo" c é uma extracção independente da f.d. uniforme no conjunto $[10, 20]$.

Na figura 3, represento a função procura esperada que tem h patamares, na simulação são 10, e é tendencialmente decrescente com c .

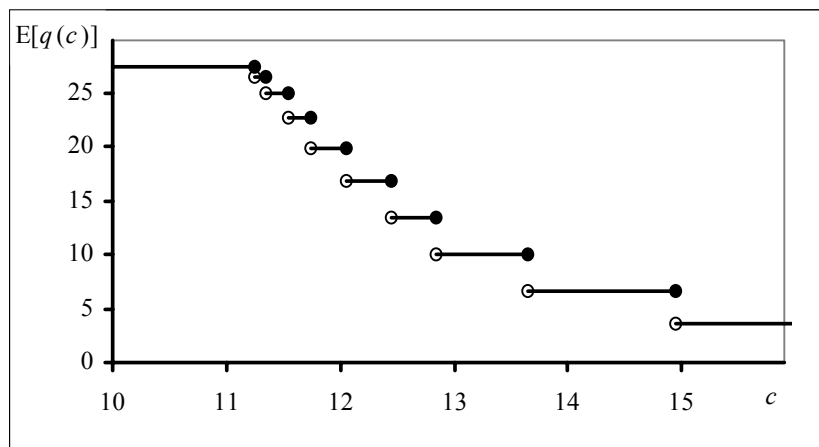


Figura 3: Função procura esperada de um vendedor

Na figura 4, represento a função lucro esperado que é crescente dentro de cada patamar da função procura esperada, tendo um aspecto de "dentes de serra", e é globalmente decrescente com c .

3.3 Equilíbrio de mercado entre os compradores e os vendedores

Determinei, no ponto 3.1, o comportamento óptimo de um comprador quando o "custo" c afixado por um vendedor escolhido de forma aleatória é uma extracção independente da f.d. $F_C(c)$, conhecida de forma pública e perfeita e, no ponto 3.2, determinei a função lucro esperado de um vendedor quando os fornecimentos anteriormente contratados s por um comprador escolhido de forma aleatória é uma extracção independente da f.d. $F_S(s)$, também conhecida de forma pública e perfeita. Em termos algébricos, esses dois pontos traduzem duas equações de um sistema cuja solução conjunta traduz a situação de equilíbrio de mercado. Nessa situação de equilíbrio, a f.d. $F_C(c)$ utilizada pelos compradores terá que ser compatível com a f.d. $F_S(s)$ utilizada pelos vendedores, o que traduz um problema de Análise Funcional com duas funções incógnitas, C e S .

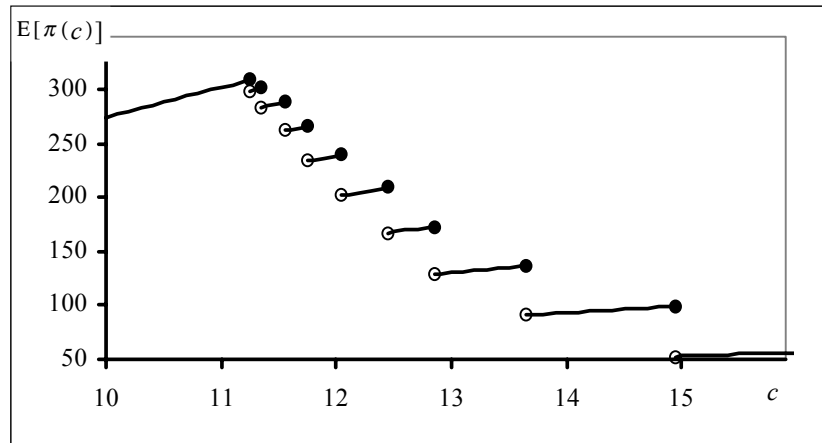


Figura 4: Função lucro esperado de um vendedor

Posso agora, em termos de análise de estática comparada, apresentar as propriedades do modelo considerado, numa situação de equilíbrio:

P7 - As funções distribuição $F_C(c)$ e $F_S(s)$ são degeneradas.

Da propriedade P6, o vendedor particular que estudo, maximiza o seu lucro se afixar o "custo de reserva" c^* dos compradores, que é igual para todos por serem idênticos. Assim sendo, é óptimo que esse vendedor adopte como "custo" a afixar exactamente c^* . Como se considera que todos os vendedores são idênticos, então todos adoptarão esse mesmo "custo" c^* pelo que não existirá dispersão, sendo a f.d. $F_C(c)$ degenerada o que implica que a f.d. $F_S(s)$ também seja degenerada.

P8 - Cada comprador contrata com o primeiro vendedor que encontrar o fornecimento para todos os períodos pelo que esse vendedor se comporta como se fosse único (afixa a qualidade mínima e o preço máximo possíveis).

Esta propriedade resulta directamente da propriedade P7.

Este resultado, de que, mesmo com vários vendedores, cada um se comporta como se fosse único - monopolista - é conhecido na literatura como paradoxo de Akerlof (1970) e Diamond (1971).

4 Possíveis justificações para os resultados e extensões ao modelo

Na literatura são identificadas e estudadas diversas extensões ao modelo básico de pesquisa sequencial de McCall (1965) que adapto na formalização deste trabalho, e que traduzem uma relaxação dos pressupostos que considero

no modelo, o que, conjecturo, poderá ser produtivo adaptar ao estudo da interacção estratégica em controlo de qualidade. Nomeadamente, de entre outros, é considerado na literatura o seguinte:

F1 - Não existe conhecimento perfeito da função distribuição do "custo" afixado pela população de vendedores, existindo conhecimento *a priori* e aprendizagem no decurso do tempo.

F2 - O processo produtivo não é "perfeitamente controlável", existindo aleatoriedade "natural" que pode ser ampliada pelo comportamento estratégico dos vendedores;

F3 - Alguns compradores tomam conhecimento de mais que uma proposta, em simultâneo;

F4 - Existe erro na avaliação da qualidade feita pelos compradores;

F5 - Os vendedores e os compradores são heterogéneos.

Referências

- [1] Akerlof, George A. (1970). The Market for 'Lemons': Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 84, p. 488-500.
- [2] Axell, Bo (1977). Search Market Equilibrium. *Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 79, p. 20-40.
- [3] Bellman, R. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press.
- [4] Diamond, Peter A. (1971). A Model of Price Adjustment. *Journal of Economic Theory*, Vol. 3, p. 156-68.
- [5] Lippman, Steven A. e John J. McCall (1976). The Economics of Job Search: A Survey. *Economic Inquiry*, Vol. 14, p. 155-89.
- [6] McCall, John J. (1965). The Economics of Information and Optimal Stopping Rules. *Journal of Business*, Vol. 38, p. 300-17.
- [7] Ramsey, Frank P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *Economic Journal*, Vol. 38, p. 543-59.
- [8] Stokey, Nancy L., Robert E. Lucas Jr., e Edward C. Prescott (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard Univ Press.