# Exercício 2.14

A empresa "PRODUTIX" utiliza dois factores produtivos, L e K, sendo a sua função custo dada pela seguinte expressão:

$$CT = Q^3 + 10Q^2 + (50 - 100K)Q + 200K^2.$$

**a)** Tendo em consideração que a empresa se encontra a produzir 2 unidades do bem nas melhores condições possíveis, qual a quantidade de factor fixo que está a ser utilizada?

**R:** A empresa está a utilizar o K que minimiza o custo de produção de período curto para o volume de 2 unidades.

$$CT(K,Q) = Q^3 + 10Q^2 + (50 - 100K)Q + 200K^2$$

$$\min_K \{CT(K,Q)\} = ?$$

CPO: $\dfrac{\partial CT(K,Q)}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow -100Q + 400K = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow K = 0.25Q$ (esta expressão dá-nos a melhor dimensão, K, para cada volume de produção, Q)

Para $Q = 2$, a empresa deve usar $\underline{\underline{K = 0.5}}$.

(ALTERNATIVA: $CT(K,2) = 8 + 40 + (50 - 100K)*2 + 200K^2 = 148 - 200K + 200K^2$

$\min_K \{CT(K,2)\} = ?$ CPO: $\dfrac{dCT(K,2)}{dK} = 0 \Leftrightarrow -200 + 400K = 0 \Leftrightarrow K = 0.5$.)

**b)** Sabendo que o preço do factor variável é de 3 u.m, e que o capital tem uma remuneração de 100 u.m., qual a quantidade de factor variável que terá de ser combinada com o volume de capital determinado na alínea anterior, para produzir 2 unidades do bem?

**R:** Através da família de funções custo total de período curto, dada no enunciado, podemos determinar o custo de produção:

$$CT(K=0.5, Q=2) = 2^3 + 10 * 2^2 + (50 - 100 * 0.5) 2 + 200 * 0.5^2 =$$
$$= 8 + 40 + 0 + 200 * 0.25 = 98$$

Como o custo de produção é obrigatoriamente igual a $p_K \cdot K + p_L \cdot L$, podemos determinar a quantidade de factor variável que deve ser combinada com $K=0.5$ para obter $Q=2$:

$$p_K \cdot K + p_L \cdot L = 98 \Rightarrow 100 * 0.5 + 3 \cdot L = 98 \Rightarrow 3L = 48 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L = 16.$$

**c)** Alterações diversas no meio envolvente levaram a empresa a reconsiderar os seus planos de produção. Admitindo que o período de tempo é suficientemente longo para que a empresa se adapte completamente ao novo enquadramento, qual a dimensão a implementar de forma a produzir com o menor custo unitário possível? Nestas circunstâncias, qual seria o volume de produção?

**R:** Pretende-se a determinação da dimensão óptima da empresa e da escala mínima eficiente. A empresa pretende minimizar o custo médio de produção. Como tem tempo de se adaptar e escolher a dimensão, K, o que está em causa é a minimização do custo médio de período longo.

Em período longo, a empresa escolhe o valor de K que minimiza o custo de produzir Q unidades. Para obtermos a função custo total de período longo a partir da família de funções custo total de período curto, basta-nos substituir K pela expressão determinada na alínea a).

$$\frac{\partial CT(K,Q)}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow \underline{K = 0{,}25\,Q}$$

$$CT_{PL}(Q) = Q^3 + 10Q^2 + (50 - 100 * 0.25Q)Q + 200 * (0.25Q)^2 =$$

$$= Q^3 + 10Q^2 + 50Q - 25Q^2 + 12{,}5Q^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow CT_{PL}(Q) = Q^3 - 2.5Q^2 + 50Q$$

$$CMd_{PL}(Q) = \frac{CT_{PL}(Q)}{Q} = Q^2 - 2.5Q + 50$$

Para minimizar o custo médio recorremos, como habitualmente, à condição de 1ª ordem:

$$\underline{CPO}: \frac{dCMd_{PL}(Q)}{dQ} = 0 \Leftrightarrow 2Q - 2.5 = 0 \Leftrightarrow Q = 1{,}25$$

Este é o volume que minimiza o custo unitário de produção em período longo, e designa-se por Escala Mínima Eficiente.

A dimensão a implementar (Dimensão óptima) calcula-se usando (mais uma vez) a expressão que relaciona o volume de produção com a quantidade de capital para a qual é mínimo o custo total de produção.

$$K = 0.25\,Q \Rightarrow K_{opt} = 0.25 * 1,25 = 0,3125.$$

**d)** Represente graficamente as funções custo total médio e custo marginal de período longo e período curto.

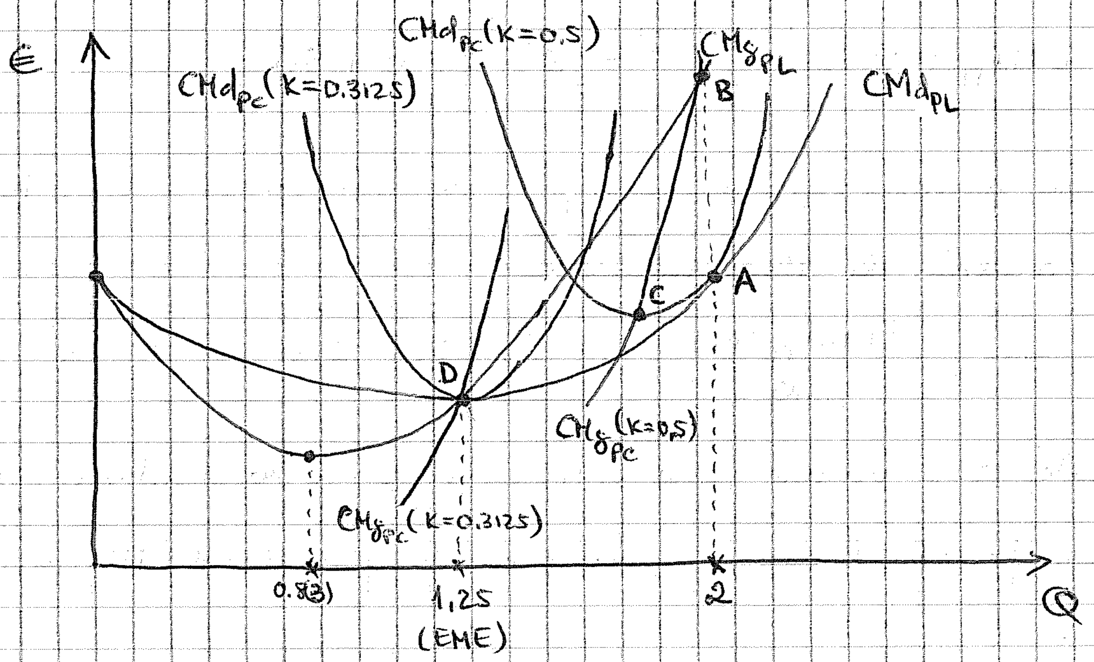
**R:** $CMd_{PL}(Q) = Q^2 - 2,5Q + 50 \Rightarrow CMd_{PL}(0) = 50$

Tem a forma de uma parábola com a concavidade virada para cima. Atinge o seu mínimo para $Q = 1.25$.

$$CMg_{PL}(Q) = \frac{d\,CT_{PL}(Q)}{dQ} = 3Q^2 - 5Q + 20$$

$$\min_{Q} CMg_{PL}(Q) = ? \quad \text{CPO: } \frac{d\,CMg_{PL}(Q)}{dQ} = 0 \Leftrightarrow 6Q - 5 = 0 \Leftrightarrow Q = 0.8(3)$$

$$CMg_{PL}\left(Q = \frac{5}{6} = 0.8(3)\right) = 3 * \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 20 = 17.92$$



Ponto A: Sendo $K=0.5$, o VPT é $Q=2$.

Logo, $CMd_{PL} = CMd_{PC}$

Atenção: não corresponde ao mínimo de $CMd_{PC}$.

Ponto B: No VPT, os custos marginais de período longo e de período curto também coincidem.

Ponto C: Este volume de produção minimiza o $CMd_{PC}$.

Logo, o custo marginal e o custo médio coincidem.

* Se $CMg_{PC} > CMd_{PC}$, o $CMd_{PC}$ seria crescente, e, portanto, não teria atingido um mínimo.

* Se $CMg_{PC} < CMd_{PC}$, o $CMd_{PC}$ seria decrescente, e, portanto, não teria atingido o seu mínimo.

Ponto D: Neste ponto é mínimo o $CMd_{PL}$. Logo, o $CMg_{PL}$ e o $CMd_{PL}$ são iguais.

Tal como vimos, para minimizar o custo médio, a empresa deveria usar $K=0.3125$. Associada a esta dimensão (óptima), está a curva de custo médio representada ($CMd_{PC}(K=0.3125)$). Coincidem, neste ponto, os custos de período longo e de período curto (dado que $Q=1.25$ é o VPT associado a $K=0.3125$).

Também é mínimo, neste ponto, o $CMd_{PC}$. Logo, são iguais o $CMd_{PC}$ e o $CMg_{PC}$.