Rendimentos à Escala:

O conceito de rendimentos à escala traduz a relação entre um aumento das quantidades de todos os factores produtivos na mesma proporção, e o correspondente aumento do volume de produção.

Em termos discretos, aumentar a quantidade produzida na proporção ***q***, implica a necessidade de aumentar as quantidades de factores de produção numa proporção ***λ***.

$$Q_i = F(K,L) \Rightarrow q \cdot Q_i = Q_f = F(\lambda \cdot K, \lambda \cdot L)$$

Definem-se três tipos de rendimentos à escala:

q* > *λ – rendimentos crescentes à escala;

q* = *λ – rendimentos constantes à escala;

q* < *λ – rendimentos decrescentes à escala.

Em termos infinitesimais, para aumentar a quantidade produzida na proporção ***1+dq***, é necessário aumentar as quantidades de factores de produção numa proporção ***1+dλ***. A relação entre as variações infinitesimais mostra-nos qual é o tipo de rendimentos à escala:

$$\begin{cases} 1 + dq > 1 + d\lambda \Leftrightarrow dq > d\lambda \Leftrightarrow \dfrac{dq}{d\lambda} > 1; \\ 1 + dq = 1 + d\lambda \Leftrightarrow dq = d\lambda \Leftrightarrow \dfrac{dq}{d\lambda} = 1; \\ 1 + dq < 1 + d\lambda \Leftrightarrow dq < d\lambda \Leftrightarrow \dfrac{dq}{d\lambda} < 1. \end{cases}$$

Definem-se, novamente, três tipos de rendimentos à escala:

dq/dλ > 1 – rendimentos crescentes à escala;

dq/dλ = 1 – rendimentos constantes à escala;

dq/dλ < 1 – rendimentos decrescentes à escala.

Economias de Escala:

Um aumento do volume de produção pode implicar um aumento dos custos de produção numa proporção maior ou menor. O conceito de economias de escala traduz a relação entre o aumento do volume de produção, e o correspondente aumento dos custos.

$$CT(q \cdot Q_i) = c \cdot CT(Q_i)$$

Se um determinado aumento do volume de produção implicar um aumento menos do que proporcional dos custos (***c* < *q***), estamos na presença de economias de escala.

Caso contrário, isto é, se o aumento dos custos for mais do que proporcional ao aumento do volume de produção (***c > q***), então temos deseconomias de escala.

c < q – economias de escala;

c > q – deseconomias de escala.

Em termos infinitesimais, para analisar as economias de escala, devemos comparar o aumento proporcional do volume de produção, ***1+dq***, com o aumento proporcional do custo de produção, ***1+dc***.

dc/dq < 1 – economias de escala;

dc/dq > 1 – deseconomias de escala.

Podemos tornar estas condições mais claras. Por definição, o custo marginal é dado por:

$$CMg(Q) = \frac{dCT(Q)}{dQ} = \frac{(1+dc)\cdot CT_i - CT_i}{(1+dq)\cdot Q_i - Q_i} = \frac{dc \cdot CT_i}{dq \cdot Q_i}\,.$$

De modo que podemos utilizar a seguinte grandeza como indicador das economias de escala:

$$s = \frac{dq}{dc} = \frac{CMd(Q)}{CMg(Q)}\,.$$

s > 1 – economias de escala;

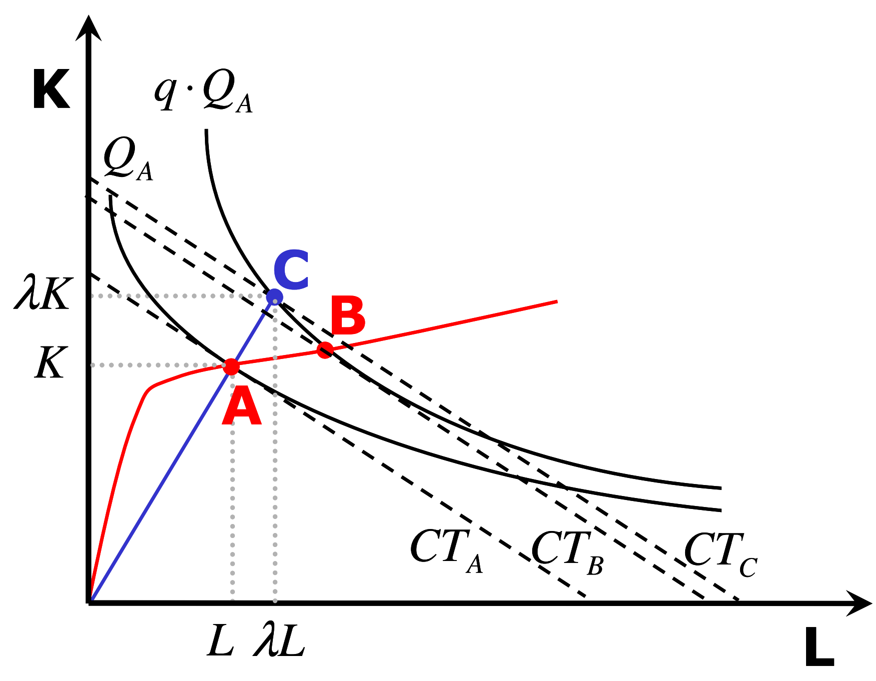
s < 1 – deseconomias de escala.

Rendimentos à Escala e Economias de Escala:

Os fenómenos de rendimentos à escala e de economias de escala estão intimamente relacionados.

Aumentar as quantidades de factores de produção na proporção $\boldsymbol{\lambda}$ permite aumentar o volume de produção na proporção $\boldsymbol{q}$. É fácil verificar que este aumento das quantidades de factores implica um aumento do custo de produção na mesma proporção:

$$CT_C = p_L \cdot \lambda L + p_K \cdot \lambda K = \lambda \cdot (p_L \cdot L + p_K \cdot K)\,.$$



No entanto, o custo de produzir $\boldsymbol{q \cdot Q_A}$ é inferior a $\boldsymbol{CT_C}$. No ponto ***C***, a empresa não está a minimizar o custo. É no ponto B que a empresa minimiza o custo de produzir $\boldsymbol{q \cdot Q_A}$.

Para analisarmos o tipo de rendimentos à escala, devemos ter presente que para aumentar a produção de $\boldsymbol{Q_A}$ para $\boldsymbol{q \cdot Q_A}$ é necessário um aumento das quantidades de factores na proporção $\boldsymbol{\lambda}$. Como vimos anteriormente:

- $\boldsymbol{\lambda < q}$ – rendimentos crescentes à escala;
- $\boldsymbol{\lambda = q}$ – rendimentos constantes à escala;
- $\boldsymbol{\lambda > q}$ – rendimentos decrescentes à escala.

O tipo de economias de escala depende da relação entre o aumento do volume de produção, $\boldsymbol{q}$, e o aumento do custo de produção, $\boldsymbol{c}$. Sabemos que:

- $\boldsymbol{c < q}$ – economias de escala;
- $\boldsymbol{c > q}$ – deseconomias de escala.

Em qualquer caso:

$$c = \frac{CT_B}{CT_A} \leq \frac{CT_C}{CT_A} = \lambda$$

No caso da figura, a desigualdade é estrita: $\boldsymbol{c < \lambda}$.

Temos a igualdade $\boldsymbol{c = \lambda}$ se os pontos ***C*** e ***B*** coincidirem. Isto acontece sempre que a linha de expansão de período longo for uma recta que parte da origem. As funções de produção associadas a linhas de expansão deste tipo são ditas homotéticas.[1] No caso ainda mais particular das funções de produção homogéneas lineares, teremos $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{q}$.

Nesse caso, é fácil verificar que rendimentos crescentes à escala estão associados a economias de escala ($\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{c} < \boldsymbol{q}$); tal como os rendimentos decrescentes à escala estão associados a deseconomias de escala ($\boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{q} \Leftrightarrow \boldsymbol{c} > \boldsymbol{q}$).

No caso de a desigualdade ser estrita ($\boldsymbol{c} < \boldsymbol{\lambda}$), então as economias de escala são mais favoráveis do que os rendimentos à escala. É fácil verificar que rendimentos crescentes à escala implicam economias de escala ($\boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{c} < \boldsymbol{q}$), mas não vice-versa; e que deseconomias de escala implicam rendimentos decrescentes à escala ($\boldsymbol{c} > \boldsymbol{q} \Rightarrow \boldsymbol{\lambda} > \boldsymbol{q}$), mas não vice-versa.

---

[1] Estamos a assumir que os preços dos factores não dependem das quantidades compradas pela empresa.

O caso infinitesimal:

Se considerarmos apenas variações infinitesimais, chegamos a uma conclusão diferente.

Sendo a função de produção diferenciável, temos:[2]

$$dQ = \frac{\partial F}{\partial K} \cdot dK + \frac{\partial F}{\partial L} \cdot dL = PMg_K \cdot dK + PMg_L \cdot dL$$

No caso de um aumento infinitesimal (***dλ***) da escala de produção, temos:

$$dK = (1 + d\lambda) \cdot K - K = K \cdot d\lambda$$
$$dL = (1 + d\lambda) \cdot L - L = L \cdot d\lambda$$

Portanto:

$$dQ = PMg_K \cdot K \cdot d\lambda + PMg_L \cdot L \cdot d\lambda$$

Com alguma manipulação, obtém-se:

$$q = \frac{Q + dQ}{Q} = 1 + \frac{dQ}{Q} = 1 + \frac{(PMg_K \cdot K + PMg_L \cdot L) \cdot d\lambda}{Q} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dq}{d\lambda} = \frac{PMg_K \cdot K + PMg_L \cdot L}{Q}$$

[2] Se as derivadas parciais da função existirem e forem contínuas, então a função é diferenciável.

Por outro lado, sabemos que o custo de produção relevante é, evidentemente, o custo total de período longo, dado por:

$$CT(Q) = \min\{p_L \cdot L + p_K \cdot K\} \quad s.a. \quad F(K,L) - Q = 0 .$$

Vamos admitir que a situação inicial (a partir da qual queremos analisar os rendimentos à escala e as economias de escala) é uma solução interior. Dado a função de produção é, por hipótese, diferenciável, podemos resolver este problema de optimização condicionada usando a técnica dos multiplicadores de Lagrange:

$$LG = p_L \cdot L + p_K \cdot K - \mu \cdot (F(K,L) - Q);$$

$$\frac{\partial LG}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow p_L - \mu \cdot \frac{\partial F}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow p_L = \mu \cdot PMg_L;$$

$$\frac{\partial LG}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow p_K - \mu \cdot \frac{\partial F}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow p_K = \mu \cdot PMg_K;$$

$$\frac{\partial LG}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow Q = F(K,L).$$

Dividindo as duas primeiras condições, obtemos a conhecida igualdade entre a taxa marginal de substituição técnica e a razão entre os preços dos factores:

$$\frac{PMg_L}{PMg_K} = \frac{p_L}{p_K}.$$

Além disso, esta técnica transmite-nos uma informação preciosa. O multiplicador de Lagrange, $\boldsymbol{\mu}$, dá-nos o impacto sobre o resultado do problema de optimização, isto é, sobre o custo mínimo de produção, de uma variação marginal da restrição, ou seja, de uma variação do volume de produção.

O valor de $\boldsymbol{\mu}$ corresponde, portanto, ao custo marginal de período longo.

$$\mu = \frac{p_L}{PMg_L} = \frac{p_K}{PMg_K} = CMg \ .$$

Podemos agora recorrer ao indicador de economias de escala:

$$s = \frac{dq}{dc} = \frac{CMd}{CMg} = \frac{(p_K \cdot K + p_L \cdot L)/Q}{CMg} = \frac{p_K \cdot K}{Q \cdot CMg} + \frac{p_L \cdot L}{Q \cdot CMg} =$$
$$= \frac{p_K \cdot K}{Q \cdot \frac{p_K}{PMg_K}} + \frac{p_L \cdot L}{Q \cdot \frac{p_L}{PMg_L}} = \frac{PMg_K \cdot K + PMg_L \cdot L}{Q}$$

Obtemos a mesma expressão que tínhamos obtido na análise dos rendimentos à escala. Portanto:

$$\frac{dq}{dc} = \frac{dq}{d\lambda} \ .$$

Isto significa que, sendo as variações do volume de produção infinitesimais, os rendimentos crescentes à escala estão sempre associados a economias de escala ($\boldsymbol{q > \lambda \Leftrightarrow c < q}$), e os rendimentos decrescentes à escala estão sempre associados a deseconomias de escala ($\boldsymbol{q} < \boldsymbol{\lambda} \Leftrightarrow \boldsymbol{c} > \boldsymbol{q}$).[3]

Surge, portanto, uma aparente contradição entre a análise com variações discretas e a análise com variações infinitesimais. No caso de variações infinitesimais (e sendo as produtividades marginais contínuas) não há vantagem em seguir a direcção da linha de expansão de período longo. Pela mesma razão, ao longo da linha de expansão de período longo, o custo marginal de período curto é igual ao custo marginal de período longo.

[3] Atenção: esta análise do caso de variações infinitesimais é válida se a função de produção for diferenciável (tiver derivadas parciais contínuas), e se as variações forem em torno de soluções interiores (combinações minimizadoras do custo que não estão na fronteira, isto é, com K>0 e L>0).