Considere a função custo $CT(q)$, contínua e diferenciável, bem como as funções custo médio, $CMd(q) = \frac{CT(q)}{q}$, e custo marginal, $CMg(q) = \frac{dCT(q)}{dq}$.

PROPOSIÇÃO 1:

A função custo médio é crescente (constante) (decrescente) em q se e só se o custo marginal for superior (igual) (inferior) ao custo médio, em q. Ou seja:

$$\frac{dCMd(q)}{dq} > 0 \iff CMg(q) > CMd(q) \; ;$$

$$\frac{dCMd(q)}{dq} = 0 \iff CMg(q) = CMd(q) \; ;$$

$$\frac{dCMd(q)}{dq} < 0 \iff CMg(q) < CMd(q) \, .$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$\frac{dCMd(q)}{dq} = \frac{d}{dq}\left(\frac{CT(q)}{q}\right) = \frac{\overbrace{\frac{dCT(q)}{dq}}^{CMg(q)} \cdot q - CT(q)}{q^2} = \underbrace{\frac{1}{q}}_{\text{sempre } > 0} \left[CMg(q) - CMd(q) \right]$$

derivada de um quociente

■

PROPOSIÇÃO 2:

Quando o volume de produção tende para zero, o custo médio e o custo marginal tendem para o mesmo valor, desde que $CF = 0$. Caso $CF > 0$, o custo variável médio e o custo marginal tendem para o mesmo valor, enquanto que o custo médio tende para $+\infty$.

DEMONSTRAÇÃO:

$$CMd(0^+) = \lim_{q \to 0^+} \frac{CT(q)}{q} \; ; \quad CMg(0^+) = \lim_{q \to 0^+} \frac{\overbrace{CT(q) - CT(0)}^{\text{custo variável}}}{q}$$

■