Duopólio e o Dilema do Prisioneiro

João Correia da Silva

FCT. Faculdade de Economia do Porto. Universidade do Porto.

e-mail: joaocs@sapo.pt

Abstract. Estudam-se os duopólios de Cournot e de Bertrand em mercados de procura linear e custos marginais constantes como jogos baseados no dilema do prisioneiro. Apresenta-se uma normalização do dilema do prisioneiro que facilita o estudo do duopólio, extensível a jogos repetidos com matrizes de ganhos variáveis. Derivam-se jogos de Cournot e de Bertrand que dependem apenas do tipo de interacção estratégica, sendo independentes tanto da procura como do custo marginal. Analisam-se duopólios nos quais as empresas decidem periodicamente sobre quantidades ou preços, havendo cooperação apenas com horizonte infinito. Mostra-se como as expectativas de crescimento do mercado contribuem para que as empresas cooperem, o que explica o surgimento de guerras de preços quando o mercado entra em estagnação. Introduz-se incerteza relativamente à evolução do mercado, na forma de choques temporários e verifica-se que choques suficientemente positivos levam as empresas a competir. Daqui se deriva uma condição de cooperação modificada para o duopólio infinito, mais exigente. Finalmente, a cooperação num duopólio com horizonte finito, para a qual existe evidência empírica, é justificada com base num jogo de informação incompleta, da autoria de Kreps *et al* (1982).

Palavras Chave: Duopólio, Dilema do prisioneiro, Cartel, Incerteza, Informação imperfeita, Informação incompleta.

* Trabalho elaborado no contexto da disciplina de Microeconomia II, da responsabilidade do Prof. António Brandão.

1 Introdução

"A teoria de jogos pode ser vista como englobando ou unificando o lado racional das ciências sociais ... desenvolve metodologias que se aplicam em princípio a todas as situações interactivas." (Aumann & Hart, 1992)[1]

A concorrência nos mercados oligopolistas caracteriza-se pela interdependência entre as decisões das empresas. Os resultados de uma empresa dependem não apenas das suas decisões, mas também das decisões das empresas concorrentes. Esta questão, que não surge nem nos mercados de concorrência perfeita nem nos monopólios, introduz uma grande complexidade na análise da concorrência oligopolista. A teoria de jogos apresenta-se como uma ferramenta privilegiada para a análise de situações nas quais a interdependência deve ser obrigatoriamente tomada em linha de conta.

Num estudo pioneiro, Augustin Cournot (1838) investigou um duopólio no qual as empresas decidiam quais as quantidades a produzir. Adoptou como conceito de equilíbrio de mercado a situação em que ambas as empresas reagem optimamente à decisão da empresa concorrente. Antecipou, portanto, em mais de um século, o conceito de equilíbrio mais comum em teoria de jogos: o equilíbrio de Nash. Um perfil de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando a estratégia de cada jogador é a melhor resposta às estratégias dos outros jogadores.

Consagrada em 1994 pela atribuiçao do Prémio Nobel da Economia a John Nash, juntamente com John Harsanyi e Reinhard Selten, esta ideia foi inicialmente recebida com alguma indiferença. John von Neumann considerou-a trivial e inadequada. O conceito de equilíbrio de Nash foi percebido como insuficiente devido à

[1] *"Game theory may be viewed as a sort of umbrella or 'unified field' theory for the rational side of social science ... it develops methodologies that apply in principle to all interactive situations."*

suposição por parte de cada agente de que as acções dos outros são independentes das suas decisões. Assume-se que cada agente selecciona a sua melhor resposta às decisões dos restantes, sem levar em consideração a possibilidade de que respostas diferentes induzam reacções diferentes por parte dos outros jogadores. Assim, se num determinado momento todos os agentes estiverem a responder optimamente às decisões dos outros, então não há incentivos para qualquer alteração de comportamento. O jogo atinge um equilíbrio.

Na formulação geral dos jogos, esta pseudo-insuficiência do conceito de equilíbrio dissolve-se. Considera-se que cada agente selecciona uma estratégia antes de que o jogo se inicie, sendo uma estratégia um plano de acção totalmente contingente. Isto é, uma estratégia especifica todas as acções a tomar para cada combinação de estratégias dos outros jogadores e de variáveis envolventes (definidas como a estratégia de um agente adicional: a "natureza"). Uma vez que as estratégias são seleccionadas antes de o jogo se iniciar, justifica-se o pressuposto de independência entre as estratégias dos diferentes jogadores. Repare que sendo planos totalmente contingentes, as estratégias determinam univocamente o desenrolar do jogo e os consequentes ganhos dos agentes.

De qualquer forma, há manifestamente algum irrealismo nos pressupostos relativos à formulação da estratégia. A complexidade que um plano totalmente contingente pode assumir lança dúvidas acerca da capacidade de um agente económico real calcular e formular a estratégia que é a melhor resposta às estratégias dos restantes agentes. Especialmente porque não conhece as estratégias destes. De facto, o agente tem de calcular as estratégias de todos os agentes envolvidos no jogo. Tudo se passa como se cada jogador se conseguisse colocar na situação de todos os outros jogadores e deduzir as estratégias que estes irão eleger. Os agentes sabem, sabem que os outros sabem que eles sabem, sabem que os outros sabem que eles sabem que os outros sabem que eles sabem, e assim sucessivamente.

Esta formulação exige, em muitos casos, uma grande (ou mesmo infinita) capacidade cognitiva por parte dos agentes, e também que os agentes detenham toda a informação relevante. Se numa dada situação estes pressupostos forem aceitáveis, então os jogadores conseguem determinar o equilíbrio de Nash. Ao acordarem jogar estratégias de Nash, nenhum dos jogadores tem incentivo para romper o acordo, uma vez que a sua estratégia é a melhor resposta às estratégias dos outros.

A aplicação da teoria de jogos assenta em quatro pressupostos fundamentais:

- Fiabilidade do jogo - o jogo descreve adequadamente a situação económica.
- Domínio do jogo - os agentes conhecem totalmente as regras do jogo e conseguem deduzir os resultados correspondentes a cada combinação de estratégias.
- Racionalidade - os agentes económicos atribuem um valor a cada resultado do jogo e pretendem obter um resultado que maximize esse valor.
- Conhecimento comum - toda a informação, incluindo as preferências dos agentes, é do conhecimento comum, o que significa que: os agentes detêm toda a informação, os agentes sabem que todos os agentes detêm toda a informação, os agentes sabem que todos os agentes sabem que todos os agentes detêm toda a informação, etc.

Existe alguma controvérsia relativamente a estes pressupostos, que não se confina à teoria dos jogos, alargando-se a toda a teoria económica neoclássica. Por um lado, em determinadas condições, as hipóteses não são sustentáveis. Por outro, são bastante práticas, tornando os jogos, ou modelos, tratáveis.

A restrição relativa ao conhecimento comum tem vindo a ser generalizada pela introdução de informação privada. Supõe-se que os agentes podem não ter a possibilidade de observar todas as jogadas dos outros, o que lhes restringe a elaboração de estratégias a planos totalmente contingentes relativamente às suas observações, e não relativamente às estratégias dos outros agentes. A jogos deste tipo aplica-se a designação de jogos de informação imperfeita. Noutro tipo de jogos, chamados de informação incompleta, os jogadores não conhecem os ganhos que os outros associam a cada resultado do jogo. Em geral, um jogo deste tipo pode ser transformado num jogo de informação imperfeita através da transformação de Harsanyi.

Um jogo paradigmático é o dilema do prisioneiro, cuja análise demonstra como a teoria de jogos pode ser ilustrativa para a teoria económica. Este jogo complementa a ideia da "*mão invisível*", segundo a qual cada agente económico, procurando apenas satisfazer o seu próprio interesse, age no interesse da sociedade em geral. O dilema do prisioneiro mostra que, em determinadas situações, a busca do interesse pessoal por parte dos agentes económicos conduz a resultados ineficientes no sentido de Pareto, isto é, inferiores para todos os agentes. Assim, a acção concertada pode levar a que todos os agentes obtenham resultados preferíveis.

Numa situação de concorrência duopolista, as empresas enfrentam uma situação deste tipo. Se cooperarem, e aqui abstraímo-nos das restrições legais, conseguem obter metade dos chamados lucros de monopólio. Por outro lado, se ambas tiverem de decidir sobre quantidades ou preços de forma independente, enão cada empresa considerará mais vantajoso "*romper*" o cartel, qualquer que seja a decisão da empresa concorrente. Assim, na persecucção do interesse próprio, ambas as empresas competem, por assim dizer, obtendo lucros menores do que aqueles que conseguiriam através da cooperação. No contexto do duopólio, esta ideia é válida tanto para a restrição da produção e para a marcação de preccos como para os gastos em campanhas publicitárias, investigação e desenvolvimento, e às variáveis competitivas em geral.

Quando a interacção é de longo prazo, podem emergir comportamentos cooperativos. Dado um jogo cujo resultado seja não cooperativo, a cooperação é pode ser um equilíbrio de Nash perfeito do jogo infinitamente repetido. Isto acontece no "*dilema do prisioneiro*". Deste modo, podemos esperar que as empresas cooperem num duopólio com horizonte infinito, mas teoricamente não no caso finito. Apesar de um jogo não cooperativo repetido um qualquer número finito de vezes continuar a ser um jogo não cooperativo, existe evidência empírica de que as empresas tendem a procurar formas de cooperação.

Na secção seguinte são revistos os duopólios de Cournot e Bertrand como jogos do tipo dilema do prisioneiro. A secção 3 apresenta uma normalização conveniente deste jogo, e extende-a a jogos repetidos com ganhos que podem variar proporcionalmente. Na secção 4 estudam-se os duopólios de Cournot e Bertrand com recurso a jogos de complexidade crescente. Duopólios nos quais as empresas decidem periodicamente sobre quantidades ou preços são analisados como jogos dinâmicos infinitamente repetidos, considerando-se que as empresas descontam os lucros futuros e esperam determinadas taxas de crescimento do mercado. Introduz-se posteriormente incerteza relativamente à evolução do mercado, na forma de choques temporários provocados pela "natureza" e deriva-se uma condição de cooperação modificada para o duopólio de horizonte infinito, mais exigente. Finalmente, apresenta-se um jogo de informação incompleta da autoria de Kreps *et al* (1982) que justifica a cooperação num duopólio com horizonte finito com base na reputação das empresas.

2 Duopólios de Cournot e de Bertrand

Considere um mercado duopolista com procura linear e rendimentos constantes à escala. A concorrência à Cournot caracteriza-se por a decisão das empresas ser sobre as quantidades a produzir. O preço é determinado pela procura, dependendo das quantidades produzidas.

$$\begin{cases} P = a - b \cdot Q \ , \\ Q = q_a + q_b \ , \\ C_{mg} = C_A = C_B = C \ . \end{cases}$$

Se as empresas cooperarem no sentido da maximização dos seus lucros conjuntos, obtêm metade dos lucros de monopólio.

$$\max_Q (P - c) \cdot Q = (a - b \cdot Q - c) \cdot Q = -b \cdot Q^2 + (a - c) \cdot Q$$

$$\text{(CPO)} \Rightarrow -2 \cdot b \cdot Q_{mon} + a - c = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{mon} = \dfrac{a - c}{2 \cdot b} \ , \\ P_{mon} = a - \dfrac{a - c}{2} = \dfrac{a + c}{2} \ . \end{cases}$$

Produzindo metade desta quantidade, as empresas vendem ao preço de monopólio e obtêm metade dos lucros de monopólio. Esta é a situação mais vantajosa para as duas empresas em conjunto.

$$\Rightarrow \begin{cases} q_A = q_B = \dfrac{a - c}{4 \cdot b} \ , \\ P_{mon} = \dfrac{a + c}{2} \ , \\ \pi_A = \pi_B = \left(\dfrac{a + c}{2} - c \right) \cdot \dfrac{a - c}{4 \cdot b} = \dfrac{a - c}{2} \cdot \dfrac{a - c}{4 \cdot b} = \dfrac{(a - c)^2}{8 \cdot b} \ . \end{cases}$$

Caso não haja cooperação, cada empresa procurará maximizar os seus lucros tomando a decisão da concorrente como um dado.

$$\max_{q_A} \, (P-c)\cdot q_A = [a-b\cdot(q_A+q_B)-c]\cdot q_A =$$
$$= -b\cdot q_A^2 - b\cdot q_A\cdot q_B + (a-c)\cdot q_A \Rightarrow$$

$$\text{(CPO)} \Rightarrow -2\cdot b\cdot q_A - b\cdot q_B + a - c = 0 \Rightarrow q_A = \frac{a-c}{2\cdot b} - \frac{q_B}{2} \quad .$$

Por simetria obtemos a decisão da outra empresa. O equilíbrio de Nash-Cournot é único:

$$\Rightarrow q_A = \frac{a-c}{2\cdot b} - \frac{q_A}{2} \Rightarrow q_A = \frac{a-c}{3\cdot b} \quad .$$

Assim, o preço de mercado e os lucros correspondentes à concorrência de Cournot são dados por:

$$P = a - b\cdot\frac{2\cdot(a-c)}{3\cdot b} = a - \frac{2\cdot(a-c)}{3} = \frac{a+2\cdot c}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_A = \pi_B = \left(\frac{a+2\cdot c}{3} - c\right)\cdot\frac{a-c}{3\cdot b} = \frac{(a-c)^2}{9\cdot b} \quad .$$

Resta-nos analisar o caso em que uma das empresas rompe o acordo. Suponha que a empresa B coopera, produzindo metade da quantidade de monopólio. A melhor resposta da empresa A corresponde a romper o acordo, produzindo uma quantidade superior.

$$\max_{q_A}(P-c)\cdot q_A = \left[a - b\cdot(q_A + \tfrac{a-c}{4\cdot b}) - c\right]\cdot q_A$$
$$= -b\cdot q_A^2 - b\cdot q_A\cdot\frac{a-c}{4\cdot b} + (a-c)\cdot q_A \Rightarrow$$

$$\text{(CPO)} \Rightarrow -2\cdot b\cdot q_A - \frac{a-c}{4} + a - c = 0 \Rightarrow q_A = -\frac{a-c}{8\cdot b} + \frac{a-c}{2\cdot b} = \frac{3\cdot(a-c)}{8\cdot b} \quad .$$

Determinam-se assim, as quantidades oferecida, o preço de mercado e os lucros das duas empresas.

$$\Rightarrow Q = \frac{3\cdot(a-c)}{8\cdot b} + \frac{a-c}{4\cdot b} = \frac{5\cdot(a-c)}{8\cdot b} \quad .$$

$$\Rightarrow P = a - b \cdot \frac{5 \cdot (a-c)}{8 \cdot b} = \frac{3 \cdot a + 5 \cdot c}{8} \quad .$$

$$\Rightarrow \pi_A = \left(\frac{3 \cdot a + 5 \cdot c}{8} - c\right) \cdot \frac{3 \cdot (a-c)}{8 \cdot b} = \frac{3 \cdot (a-c)}{8} \cdot \frac{3 \cdot (a-c)}{8 \cdot b} = \frac{9 \cdot (a-c)^2}{64 \cdot b} \quad .$$

$$\Rightarrow \pi_B = \frac{3 \cdot (a-c)}{8} \cdot \frac{a-c}{4 \cdot b} = \frac{3 \cdot (a-c)^2}{32 \cdot b} \quad .$$

Portanto, se considerarmos que as empresas decidem simultaneamente as quantidades a produzir, sem conhecimento da decisão da concorrente, podemos modelar este duopólio como um dilema do prisioneiro.

	Cartel	Concorrência
Cartel	$\frac{1}{8} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$	$\frac{3}{32} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{9}{64} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$
Concorrência	$\frac{9}{64} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{3}{32} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{1}{9} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$

Table 1: Duopólio de Cournot como um jogo na forma normal.

O duopólio de Bertrand modeliza-se de forma semelhante. A concorrência efectua-se agora pelos preços, e assume-se que os consumidores compram à empresa que marcar o menor preço. Se os preços forem iguais, então cada empresa vende metade da quantidade procurada. Numa situação cooperativa, cada empresa obtém (tal como na concorrência de Cournot) metade dos lucros de monopólio. No caso de uma empresa romper o cartel, fixando um preço marginalmente inferior, recebe todos os lucros. Consideramos que no caso de as duas empresas competirem, o resultado é o equilíbrio de Bertrand, ou seja, lucros nulos. A matriz de ganhos fica dada por:

	Cartel	Concorrência
Cartel	$\frac{(a-c)^2}{8 \cdot b}, \frac{(a-c)^2}{8 \cdot b}$	$0, \frac{(a-c)^2}{4 \cdot b}$
Concorrência	$\frac{(a-c)^2}{4 \cdot b}, 0$	$0, 0$

Table 2: Duopólio de Bertrand como um jogo na forma normal.

3 O Dilema do Prisioneiro

Nesta secção apresentamos uma normalização conveniente dos jogos do tipo dilema do prisioneiro. Começamos por escrever na forma normal, ou estratégica,[2] um jogo simétrico entre dois agentes, para em seguida verificarmos que (com a excepção de um tipo preciso de jogos) bastam dois parâmetros para descrever um jogo deste tipo. Finalmente, o jogo conhecido por dilema do prisioneiro é revisto e normalizado.

3.1 Jogos simétricos com dois jogadores

Assumindo que cada jogador dispõe apenas de duas possibilidades de acção, um jogo simétrico com dois agentes na forma normal (ou estratégica) escreve-se como uma matriz 2×2.

	Esquerda	Direita
Cima	x_{11}, x_{11}	x_{12}, x_{21}
Baixo	x_{21}, x_{12}	x_{22}, x_{22}

Table 3: Jogo simétrico com dois jogadores e duas possibilidades de acção.

Um jogo mantém-se equivalente caso, após uma transformação, a ordenação em termos de preferências dos diferentes resultados se mantiver inalterada para todos os jogadores. Assim, se subtraírmos um mesmo valor a todos os elementos da matriz de ganhos, o jogo mantém-se equivalente.

[2] Um jogo na forma normal, ou estratégica, escreve-se atribuindo a cada combinação de estratégias os ganhos correspondentes a jogador.

	Esquerda	Direita
Cima	$x_{11} - x_{22}, x_{11} - x_{22}$	$x_{12} - x_{22}, x_{21} - x_{22}$
Baixo	$x_{21} - x_{22}, x_{12} - x_{22}$	$0, 0$

Table 4: Transformação num jogo equivalente.

O jogo também se mantém equivalente se dividirmos todos os elementos da matriz de ganhos por um valor positivo. Estas duas transformações equivalem a uma mudança de unidades de ganho (origem e escala).

	Esquerda	Direita
Cima	$1, 1$	$\frac{x_{12}-x_{22}}{x_{11}-x_{22}}, \frac{x_{21}-x_{22}}{x_{11}-x_{22}}$
Baixo	$\frac{x_{21}-x_{22}}{x_{11}-x_{22}}, \frac{x_{12}-x_{22}}{x_{11}-x_{22}}$	$0, 0$

Table 5: Jogo simétrico com dois jogadores - forma normalizada.

Com excepção do caso em que $x_{11} = x_{22}$, que implica uma divisão por zero, os jogos simétricos com dois jogadores e duas possibilidades de acção podem descrever-se apenas por dois parâmetros. Observe que $x_{11} = x_{22}$ não ocorre num dilema do prisioneiro.

3.2 Dilema do prisioneiro simples

Considere que duas empresas concorrem num mercado duopolista. Se fizerem um acordo de cartel, obtêm metade dos lucros de monopólio. No entanto, se uma romper o acordo, obtém um lucro ainda mais elevado, enquanto que a outra tem prejuízos. Suponha ainda que se as empresas se comportarem de forma competitiva obtêm ambas lucros nulos. Um jogo deste tipo designa-se vulgarmente por dilema do prisioneiro.

O que é fulcral neste jogo é a diferença entre o resultado óptimo e aquele que resulta de cada empresa seguir os seus incentivos, tomando o comportamento da outra como um dado. O melhor para as empresas em conjunto seria fazer um acordo para vender a preços altos e iguais, de forma a dividir os lucros de monopólio. Mas, se nos colocarmos na perspectiva de uma delas verificamos o seguinte: se a outra empresa cooperar, o melhor é romper o acordo e obter lucros muito elevados; se a outra romper o acordo, o melhor é romper também, e obter lucros nulos em vez de prejuízos.

É sempre melhor romper o acordo, independentemente do comportamento da empresa concorrente. Assim, o dilema do prisioneiro tem um equilíbrio em estratégias dominantes,[3] correspondente à situação em que ambas as empresas se comportam de forma competitiva. De forma genérica, este jogo descreve-se pela seguinte matriz, com $A \geq 1$, $B \leq 0$ e $A - B \leq 2$. Em secções seguintes, o dilema do prisioneiro será analisado, sem perda de generalidade, com base nesta matriz de ganhos.

	Nega	Confessa
Nega	$1, 1$	$-B, A$
Confessa	$A, -B$	$0, 0$

Table 6: Dilema do Prisioneiro - forma normalizada.

3.3 Dilema do prisioneiro finitamente repetido

Considere agora que o dilema do prisioneiro se joga de forma repetida, e que o comportamento dos agentes depende da história do jogo. Uma estratégia para o jogo repetido, sendo um plano de acção totalmente contingente, especifica as

[3] Uma "*estratégia dominante*" é sempre a melhor resposta, quaisquer que sejam as estratégias dos outros jogadores.

decisões a tomar para cada historial do jogo. Exemplos conhecidos são a estratégia "*Trigger*" e a "*Tit-for-Tat*". A estratégia "*Trigger*" corresponde a cooperar até que o adversário compita, e competir sempre a partir desse momento. A "*Tit-for-Tat*", não sendo uma estratégia racional, permite obter excelentes resultados. Corresponde a jogar sempre aquilo que o adversário jogou no perodo anterior (na primeira jogada, não existindo jogada anterior, coopera-se).

No jogo repetido, competir sempre deixa de ser uma estratégia dominante. Por exemplo, se a estratégia do adversário for "*Tit-for-Tat*", pode verificar-se que a melhor resposta é cooperar sempre e competir apenas na última jogada.

Mas apesar de não ser uma estratégia dominante, competir sempre continua a ser a estratégia que ambos os jogadores adoptam em equilíbrio se o dilema de prisioneiro for repetido apenas um número finito de vezes. Isto pode confirmar-se por indução retroactiva.

Na última repetição do jogo, independentemente dos resultados anteriores, os jogadores competem, porque uma estratégia que admita a cooperação na última jogada é dominada[4] por uma estratégia que seja em tudo semelhante mas que compita na última jogada. Dado que o resultado da última jogada é a competição, desaparece o incentivo para que os agentes cooperem na penúltima jogada. Considerando apenas as estratégias ainda não eliminadas, verificamos que uma que admita cooperar na penúltima jogada é dominada por uma estratégia que seja em tudo semelhante mas que prescreva a competição na penúltima jogada. Se prosseguirmos este raciocínio, verificamos que as estratégias de equilíbrio correspondem a competir sempre.

[4] Diz-se que uma estratégia s é dominada por s' se esta conduzir a ganhos sempre superiores, quaisquer que sejam as estratégias dos outros jogadores.

3.4 Dilema do prisioneiro infinitamente repetido

Recorde agora a matriz de ganhos do dilema do prisioneiro normalizado (com $A \geq 1$, $B \geq 0$ e $A - B \leq 2$).

	Nega	Confessa
Nega	$1, 1$	$-B, A$
Confessa	$A, -B$	$0, 0$

Table 7: Matriz de ganhos do jogo do dilema do prisioneiro simples.

Pode verificar-se que, com um número infinito de repetições, a adopção de estratégias "*Trigger*" por parte de ambas as empresas constitui um equilíbrio de Nash.[5] Como vimos, nesse caso, se numa dada repetição do jogo uma empresa não cooperar, então a que joga a estratégia "*Trigger*" nunca mais coopera. Mas, se ambas jogarem estratégias "*Trigger*", então cooperam sempre. Em contrapartida, o ganho associado a não cooperar é, assim, igual a A no primeiro período e 0 em todos os outros. Assim, ambas as empresas cooperam sempre.

Em situações reais, é comum as empresas descontarem os seus lucros futuros, por preferem obter o mesmo lucro no presente. Nesse caso, o jogo repete-se mas com ganhos variáveis. Consideramos em seguida estas variações de uma forma simples.

[5]Recorde o teorema de Friedman (1971), que afirma que se e_{single} for um equilíbrio de Nash de um jogo simples e se houver um resultado desse jogo simples, e'_{single}, melhor para todos os jogadores (o dilema do prisioneiro é o caso típico), então existe um equilíbrio de Nash do jogo infinitamente repetido no qual se repete o resultado e'_{single} em todas as jogadas, desde que o factor de desconto, δ, comum a todos os jogadores, seja suficientemente próximo de 1.

3.5 Dilema do prisioneiro com ganhos variáveis

Suponha que as matrizes de ganhos dos diferentes períodos são diferentes, mas sempre proporcionais umas às outras. No período t, a matriz de ganhos define-se pela multiplicação da matriz de ganhos do período inicial por um factor de proporcionalidade K_t.

	Nega	Confessa
Nega	$K_t \cdot x_{11}^0, K_t \cdot x_{11}^0$	$K_t \cdot x_{12}^0, K_t \cdot x_{21}^0$
Confessa	$K_t \cdot x_{21}^0, K_t \cdot x_{12}^0$	$K_t \cdot x_{22}^0, K_t \cdot x_{22}^0$

Table 8: Matriz de ganhos no período t ($K_0 = 1$).

Pretendemos extender a normalização que efectuámos para o caso simples, de modo a facilitar a análise do jogo. Observe que podemos subtrair a todos os ganhos de um qualquer estágio do jogo uma mesma quantidade. Subtraindo o valor $K_t \cdot x_{22}^0$ em cada estágio, obtemos matrizes com ganhos nulos associados à competição mútua.

	Nega	Confessa
Nega	$K_t \cdot (x_{11}^0 - x_{22}^0), K_t \cdot (x_{11}^0 - x_{22}^0)$	$K_t \cdot (x_{12}^0 - x_{22}^0), K_t \cdot (x_{21}^0 - x_{22}^0)$
Confessa	$K_t \cdot (x_{21}^0 - x_{22}^0), K_t \cdot (x_{12}^0 - x_{22}^0)$	$0, 0$

Table 9: Matriz de ganhos equivalente no período t ($K_0 = 1$).

Não podemos dividir os ganhos da matriz de um dado período por um qualquer valor. Mas podemos dividir todos os ganhos de todos os períodos por uma constante. Dividir todos os ganhos de todos os períodos por $x_{11}^0 - x_{22}^0$, obtemos as matrizes de ganhos equivalentes. Definimos assim o jogo normalizado.

	Esquerda	Direita
Cima	$\frac{K_t \cdot x_{11}^0 - K_t \cdot x_{22}^0}{x_{11}^0 - x_{22}^0}, \frac{K_t \cdot x_{11}^0 - K_t \cdot x_{22}^0}{x_{11}^0 - x_{22}^0}$	$\frac{K_t \cdot x_{12}^0 - K_t \cdot x_{22}^0}{x_{11}^0 - x_{22}^0}, \frac{K_t \cdot x_{21}^0 - K_t \cdot x_{22}^0}{x_{11}^0 - x_{22}^0}$
Baixo	$\frac{K_t \cdot x_{21}^0 - K_t \cdot x_{22}^0}{x_{11}^0 - x_{22}^0}, \frac{K_t \cdot x_{12}^0 - K_t \cdot x_{22}^0}{x_{11}^0 - x_{22}^0}$	$0, 0$

Table 10: Matriz de ganhos equivalentes no período t.

Verificamos, assim, que mesmo que os ganhos variem de período para período (mas apenas por um factor de proporcionalidade) podemos estudar o jogo na sua forma normalizada.

	Esquerda	Direita
Cima	K_t, K_t	$-K_t \cdot B, K_t \cdot A$
Baixo	$K_t \cdot A, -K_t \cdot B$	$0, 0$

Table 11: Matriz de ganhos normalizada do dilema do prisioneiro repetido.

Esta normalização vai permitir-nos analisar facilmente o impacto do desconto sobre os lucros futuros ($K_t = \delta^t$). Veremos também que podemos modelizar certas formas de evolução da rentabilidade do mercado.

4 Jogos de Cournot e Bertrand

Na matriz associada ao duopólio de Cournot, derivada anteriormente, todos os ganhos (lucros) são proporcionais a $\frac{(a-c)^2}{b}$, parâmetro que passamos a designar por índice de rentabilidade do mercado.

	Cartel	Concorrência
Cartel	$\frac{1}{8} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$	$\frac{3}{32} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{9}{64} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$
Concorrência	$\frac{9}{64} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{3}{32} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}, \frac{1}{9} \cdot \frac{(a-c)^2}{b}$

Table 12: Duopólio de Cournot como um jogo na forma normal.

Como vimos anteriormente, a divisão da matriz de ganho por uma constante não altera o jogo (equivale a uma mudança de unidades, que obviamente preserva a ordem de preferências). Assim, dividindo a matriz por $\frac{(a-c)^2}{8b}$ obtemos o seguinte jogo equivalente:

	Cartel	Concorrência
Cartel	$1, 1$	$\frac{3}{4}, \frac{9}{8}$
Concorrência	$\frac{9}{8}, \frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}, \frac{8}{9}$

Table 13: Duopólio de Cournot - ganhos equivalentes.

Subtraindo $\frac{8}{9}$ e multiplicando por 9 todos os ganhos da matriz, obtemos a matriz que corresponde ao dilema do prisioneiro na forma normalizada:

	Cartel	Concorrência
Cartel	$1, 1$	$-\frac{5}{4}, \frac{17}{8}$
Concorrência	$\frac{17}{8}, -\frac{5}{4}$	$0, 0$

Table 14: Duopólio de Cournot como dilema do prisioneiro.

Este dilema do prisioneiro é equivalente ao duopólio de Cournot. É de realçar o facto de a matriz de ganhos normalizada ser independente dos parâmetros do mercado. Tudo o que se exige é uma procura linear e custo marginal constante.

A normalização do duopólio de Bertrand é mais simples. Observe que também neste caso, os ganhos (lucros) são proporcionais a $\frac{(a-c)^2}{b}$, o índice de rentabilidade do mercado.

	Cartel	Concorrência
Cartel	$\frac{(a-c)^2}{8 \cdot b}, \frac{(a-c)^2}{8 \cdot b}$	$0, \frac{(a-c)^2}{4 \cdot b}$
Concorrência	$\frac{(a-c)^2}{4 \cdot b}, 0$	$0, 0$

Table 15: Duopólio de Bertrand como um jogo na forma normal.

Dividindo esta matriz por $\frac{(a-c)^2}{8b}$ obtemos um jogo equivalente, que é um dilema do prisioneiro na forma normalizada.

	Cartel	Concorrência
Cartel	$1, 1$	$0, 2$
Concorrência	$2, 0$	$0, 0$

Table 16: Duopólio de Bertrand como dilema do prisioneiro.

Verificamos que os duopólios de Cournot e Bertrand são dilemas do prisioneiro. Como vimos anteriormente, o equilíbrio do dilema do prisioneiro é não cooperativo. Em vez de produzirem as quantidades de monopólio ou de marcarem o preço de monopólio, as empresas competem, obtendo lucros inferiores.

Um modelo de concorrência mais realista permitiria às empresas fixarem preços periodicamente. Esta generalização equivale a considerar um jogo de duopólio repetido, no qual as empresas podem definir estratégias que fazem depender cada decisão sobre quantidades ou preços do historial do jogo.

4.1 Desconto dos lucros futuros

Vamos então considerar o duopólio infinitamente repetido assumindo que as empresas descontam os seus ganhos futuros. Este desconto pode ser justificado pela consideração de uma taxa de juro r, ou pela possibilidade de que o jogo acabe, por exemplo se houver uma inovação que torne o mercado obsoleto.

$$\delta = \frac{1-p}{1+r}.$$

Uma unidade de ganho no período $t+s$ equivale a δ^s unidades de ganho em t, sendo $\delta < 1$. A consideração do factor de desconto altera a matriz de ganhos.

	Cartel	Concorrência
Cartel	$\delta^t \cdot \frac{(a-c)^2}{8b}, \delta^t \cdot \frac{(a-c)^2}{8b}$	$\delta^t \cdot \frac{3(a-c)^2}{8b}, \delta^t \cdot \frac{9(a-c)^2}{64b}$
Concorrência	$\delta^t \cdot \frac{9(a-c)^2}{64b}, \delta^t \cdot \frac{3(a-c)^2}{32b}$	$\delta^t \cdot \frac{(a-c)^2}{9b}, \delta^t \cdot \frac{(a-c)^2}{9b}$

Table 17: Duopólio de Cournot como um jogo na forma normal - ganhos no período t.

Como vimos na secção anterior, é equivalente considerar o jogo normalizado.

	Cartel	Concorrência
Cartel	δ^t, δ^t	$-\delta^t \cdot \frac{5}{4}, \delta^t \cdot \frac{17}{8}$
Concorrência	$\delta^t \cdot \frac{17}{8}, -\delta^t \cdot \frac{5}{4}$	$0, 0$

Table 18: Duopólio de Cournot normalizado com desconto dos lucros futuros.

Em qualquer dos jogos (Cournot ou Bertrand), o ganho actualizado de cooperar sempre é dado por:

$$1 + \delta + \delta^2 + ... = 1 \cdot \frac{1-\delta^\infty}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}.$$

	Cartel	Concorrência
Cartel	δ^t, δ^t	$0, \delta^t \cdot 2$
Concorrência	$\delta^t \cdot 2, 0$	$0, 0$

Table 19: Duopólio de Bertrand normalizado com desconto dos lucros futuros.

Podemos agora verificar em que condições é que as empresas adoptam estratégias "*Trigger*". Como vimos, se num dado estágio uma empresa não cooperar, então a que joga a estratégia "*Trigger*" nunca mais coopera. Se ambas jogarem estratégias "*Trigger*", cooperam sempre. Em contrapartida, o ganho associado a não cooperar é igual a A no primeiro período e 0 em todos os outros. Assim, obtém-se a condição de cooperação.

$$\frac{1}{1-\delta} > A \Rightarrow 1 > A - A \cdot \delta \Rightarrow \delta > \frac{A-1}{A}.$$

No jogo de Cournot normalizado, $A = \frac{17}{8}$, logo, as empresas cooperam se:

$$\delta > \frac{17/8 - 1}{17/8} = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{17} = \frac{9}{17}.$$

No jogo de Bertrand normalizado ($A = 2$) as empresas cooperam caso:

$$\delta > \frac{1}{2}.$$

Cooperar permite às empresas obter melhores resultados futuros, enquanto que competir traz benefícios imediatos. É natural, portanto, esta condição sobre o parâmetro de desconto que tornam a cooperação (leia-se adopção de estratégias "*Trigger*") mais atractiva do que a competição. Observe que esta condição não depende da procura nem do custo marginal de produção. Apenas depende do tipo de interacção competitiva.

4.2 Expectativas de evolução do mercado

Na análise dos duopólios de Cournot e Bertrand, dividimos os ganhos das empresas pelo factor $\frac{(a-c)^2}{b}$, o índice de rentabilidade do mercado. No jogo repetido, para proceder a esta normalização supusemos que este índice se mantém constante ao longo do tempo.

Nesta secção pretendemos generalizar a análise para mercados com uma evolução temporal prevista. Os parâmetros que definem o mercado são: a procura do bem caso fosse livre - a; o custo marginal de produção - c; e a inclinação da curva da procura - b. Mas, como verificámos anteriormente, a influência de todos estes parâmetros pode ser condensada no índice de valor do mercado, $\frac{(a-c)^2}{b}$. Mantendo o desconto dos lucros futuros, mas agora supondo que o índice de valor do mercado evolui a uma taxa g constante, o jogo de Cournot passa a ser descrito por:

	Cartel	Concorrência
Cartel	$\delta^t \cdot g^t, \delta^t \cdot g^t$	$-\delta^t \cdot g^t \cdot \frac{5}{4}, \delta^t \cdot g^t \cdot \frac{17}{8}$
Concorrência	$\delta^t \cdot g^t \cdot \frac{17}{8}, -\delta^t \cdot g^t \cdot \frac{5}{4}$	$0, 0$

Table 20: Duopólio de Cournot normalizado com ganhos variáveis.

E o jogo de Bertrand por:

	Cartel	Concorrência
Cartel	$\delta^t \cdot g^t, \delta^t \cdot g^t$	$0, \delta^t \cdot g^t \cdot 2$
Concorrência	$\delta^t \cdot g^t \cdot 2, 0$	$0, 0$

Table 21: Duopólio de Bertrand normalizado com ganhos variáveis.

Os ganhos associados à cooperação passam a ser:

$$1 + \delta \cdot g + \delta^2 \cdot g^2 + ... = 1 \cdot \frac{1 - (\delta \cdot g)^\infty}{1 - \delta \cdot g} = \frac{1}{1 - \delta \cdot g}.$$

Logo, as empresas cooperam caso:

$\delta \cdot g > \dfrac{9}{17}$, no modelo de Cournot, e $\delta \cdot g > \dfrac{1}{2}$, no modelo de Bertrand.

Neste caso, a expectativa de uma evolução positiva do mercado incentiva as empresas a privilegiarem os lucros futuros, cooperando no presente. Isto fornece uma justificação para o facto de as empresas frequentemente iniciarem guerras de preços no momento em que o mercado entra na fase de maturidade.

4.3 Picos de procura e guerras de preços

Se, por alguma razão, o valor do mercado num dado período for excepcionalmente elevado, de modo a que $A > \dfrac{1}{1-\delta \cdot g}$, então, como vimos anteriormente, a cooperação deixa de ser sustentável. As empresas preferem competir nessa jogada, e portanto competirão sempre a partir desse momento. As expectativas de crescimento do mercado incentivam a cooperação, mas um valor do mercado circunstancialmente elevado ("*boom*") pode conduzir a uma guerra de preços.

Podemos agora modelar uma situação mais geral, que conduz a um jogo dinâmico de informação imperfeita. Aém da taxa de crescimento g, o mercado passa a ter uma componente aleatória, o factor k_t. Esta componente aleatória consiste numa sequência de choques temporários independentes. Sem perda de generalidade, assumimos que a distribuição de probabilidade de k_t, pública, tem média 1. Num dado período, o parâmetro k_t altera os ganhos do período t, mas não afecta os ganhos futuros. No período t, o ganho esperado associado a cooperar sempre passa a ser dado por:

$$k_t + \delta \cdot g + \delta^2 \cdot g^2 + ... = k_t + \frac{\delta \cdot g}{1-\delta \cdot g}.$$

Enquanto que o ganho associado a competir passa a ser:

$$k_t \cdot A + 0 + 0 + ... = k_t \cdot A.$$

A condição para a cooperação fica:

$$k_t + \frac{\delta \cdot g}{1 - \delta \cdot g} > k_t \cdot A \Rightarrow k_t < \frac{\delta \cdot g}{(1 - \delta \cdot g) \cdot (A - 1)}.$$

O que significa que se k_t ultrapassar este valor, as empresas competem nesse periodo, competindo também daí em diante, de modo que se desfaz o equilíbrio cooperativo. Como assumimos que a distribuição de k_t era conhecida, as empresas passam a conhecer a probabilidade de que k_t exceda este valor crítico. Uma vez que, se isso acontecer, os ganhos passam a ser nulos, então esta probabilidade pode ser vista como a probabilidade de que o jogo acabe.

$$p = Prob\left(k_t > \frac{\delta' \cdot g}{(1 - \delta' \cdot g) \cdot (A - 1)}\right).$$

O cálculo de p tem de ser feito de forma recursiva, uma vez que:

$$\delta' = \delta \cdot (1 - p).$$

De qualquer forma, pode calcular-se p, assim como o novo valor δ', que já tem em conta esta probabilidade de que o jogo se torne competitivo.

$$p = Prob\left(k_t > \frac{\delta \cdot (1 - p) \cdot g}{(1 - \delta \cdot (1 - p) \cdot g) \cdot (A - 1)}\right).$$

E a condição de cooperação fica:

$$k_t < \frac{\delta \cdot (1 - p) \cdot g}{[1 - \delta \cdot (1 - p) \cdot g] \cdot (A - 1)}.$$

Ou, equivalentemente:

$$k_t < \frac{\delta' \cdot g}{(1 - \delta' \cdot g) \cdot (A - 1)}.$$

4.4 Cooperação no duopólio finito

Observam-se frequentemente comportamentos cooperativos em situações semelhantes ao dilema do prisioneiro com um número finito de repetições. No entanto, o equilíbrio de Nash deste jogo corresponde à competição em todos os estágios do jogo. Uma explicação para este paradoxo foi apresentada por Kreps, Milgrom, Roberts e Wilson (1982) com base num modelo de informação incompleta que incorpora a ideia de reputação. Segue-se uma exposição deste modelo.

Considere novamente a matriz de ganhos do dilema do prisioneiro normalizado (com $A \geq 1$, $B \geq 0$ e $A - B \leq 2$):

	Nega	Confessa
Nega	$1, 1$	$-B, A$
Confessa	$A, -B$	$0, 0$

Table 22: Dilema do prisioneiro.

Assuma que o jogador "Coluna" atribui uma probabilidade p à possibilidade do jogador "Linha" ser de um tipo que joga sempre a estratégia "*Tit-for-Tat*". Tal como referimos anteriormente, esta estratégia não é racional, no entanto permite obter óptimos resultados.[6] O seguinte raciocínio esquencial permite-nos verificar que, nestas condições, a quantidade de vezes que um jogador escolhe competir é limitada, portanto a cooperação acaba por surgir quase sempre se o número de repetições for elevado.

[6]Venceu as duas vezes que se realizou o torneio do dilema do prisioneiro. Neste torneio os participantes jogavam todos contra todos utilizando sempre a mesma estratégia, escolhida "*a priori*". A estratégia "*Tit-for-Tat*", apesar de normalmente não vencer os duelos, conseguia quase sempre resultados muito bons, o que lhe permitiu liderar a classificação no final de ambos os torneios.

1. Se, em algum momento, "Linha" não jogar de forma semelhante ao "*Tit-for-Tat*", então o outro fica a saber que este jogador é racional, e, a partir desse momento, ambos competem sempre. Surge, assim, um incentivo para que "Linha" imite o "*Tit-for-Tat*", no sentido de manter a possibilidade de cooperação.

2. Se na jogada n "Coluna" competir, então na jogada $n+1$ "Linha" compete. Caso contrário revelaria que não joga "*Tit-for-Tat*" e a partir desse momento os jogadores competiriam sempre.

3. Faltando n estágios para o final do jogo, se "Coluna" atribui a probabilidade q à possibilidade de "Linha" ser "*Tit-for-Tat*" e cooperou na jogada anterior, então espera um ganho não inferior a $q \cdot n - B$ no que resta de jogo.
Note que se "Coluna" jogar a estratégia "*Trigger*", obtém um ganho de n contra o jogador "*Tit-for-Tat*", e um ganho maior ou igual que $-B$ contra o jogador racional. O ganho esperado da estratégia "*Trigger*" é, portanto:
$q \cdot n - (1-q) \cdot B \geq q \cdot n - B$.

4. Faltando n estágios para o final do jogo, se "Coluna" atribui a probabilidade q à possibilidade de "Linha" ser "*Tit-for-Tat*" e competiu na jogada anterior, então espera um ganho não inferior a $q \cdot (n-1) - 2 \cdot B$ no que resta de jogo.
Pelo ponto 1, "Linha" compete quer seja racional ou "*Tit-for-Tat*", logo, o valor de q não se altera nesta jogada. Assim, se "Coluna" cooperar, perde B nessa jogada e ganha pelo menos $q \cdot (n-1) - B$ no resto do jogo (ponto 3). Ou seja, consegue ganhar pelo menos $q \cdot (n-1) - 2 \cdot B$.

5. Faltando n estágios para o final do jogo, se "Coluna" atribui a probabilidade q à possibilidade de "Linha" ser "*Tit-for-Tat*", o jogador "Linha" racional espera um ganho não inferior a $q \cdot (n-1) - 3B - A$ no que resta de jogo.
Repare que o "Coluna" não tem um resultado pior contra o "*Tit-for-Tat*" do que contra o racional (pelo ponto 2, o racional compete sempre que o "*Tit-for-Tat*" competiria, e talvez mais vezes). Jogando "*Tit-for-Tat*", o jogador "Linha" não

perde para “Coluna” por mais do que $B + A$. Como “Coluna” espera ganhar pelo menos $q \cdot (n-1) - 2B$, então “Linha” espera ganhar não menos do que $q \cdot (n-1) - 3B - A$.

6. Com mais do que $\frac{2A+4B+2q}{q}$ estágios por jogar, sendo q a probabilidade que “Coluna” atribui à possibilidade de “Linha” ser “*Tit-for-Tat*”, o jogador “Linha” joga “*Tit-for-Tat*”. Assim, dado que a probabilidade inicial é p, até faltarem menos do que $\frac{2A+4B+2p}{p}$ estágios, esta probabilidade não se altera, dado que “Linha” joga “*Tit-for-Tat*” qualquer que seja o seu tipo.
Se na jogada anterior “Coluna” competiu, pelo ponto 1, “Linha” compete (joga “*Tit-for-Tat*”). Tendo “Coluna” cooperado na jogada anterior, se “Linha” competir revela que é racional. Assim, em todas as jogadas subsequentes haverá competição, de modo que “Linha” obtém um ganho total menor ou igual a A. Cooperando, “Linha” obtém no pior dos casos $-B$ nessa jogada e $q \cdot (n-2) - 3B - A$ no resto do jogo.
$q \cdot (n-2) - 4 \cdot B - A > A \Rightarrow q \cdot n > 2q + 4B + 2A \Rightarrow n > \dfrac{2A + 4B + 2q}{q}$.

7. O número de estágios em que algum jogador compete é, portanto, menor ou igual do que:

$$\frac{2A + 4B + 2p}{p} \cdot \left[1 + \frac{2}{\min\{2 - A + B, 1\}}\right].$$

Pelo ponto 6, “Linha” joga “*Tit-for-Tat*” até faltarem $\frac{2A+4B+2p}{p}$ jogadas para o final. Se “Coluna” jogar a estratégia “*Trigger*”, obtém um ganho maior ou igual a $N - \frac{2A+4B+2p}{p}$. Se “Coluna” competir antes de que faltem as tais $\frac{2A+4B+2p}{p}$ jogadas para o final, nessa jogada consegue A. Se passado m jogadas voltar a cooperar, consegue $-B$ nessa jogada e 0 entretanto. Assim, perde $1 + m + B$ para ganhar A, ou seja, perde $1 + \frac{1+B-A}{m}$ por jogada. De cada vez que compete, isso custa-lhe pelo menos $\min\{2 - A + B, 1\}$.
Assim, se competir k vezes antes da jogada $\frac{2A+4B+2p}{p}$, o seu ganho não excederá $N - k \cdot \min\{2 - A + B, 1\}$. Logo:

$$N - k \cdot \min\{2 - A + B, 1\} \geq N - \frac{2A + 4B + 2p}{p} \Rightarrow k \leq \frac{2A + 4B + 2p}{p \cdot \min\{2 - A + B, 1\}}.$$

No máximo, "Linha" compete também k vezes antes de que faltem apenas $\frac{2A+4B+2p}{p}$ jogadas para o final (respondendo às k vezes que "Coluna" compete - recorde que "Linha" joga "*Tit-for-Tat*" até faltarem $\frac{2A+4B+2p}{p}$ jogadas). Assim, não há mais do que C jogadas com competição, sendo:

$$C = 2 \cdot k + \frac{2A + 4B + 2p}{p} = 2 \cdot \frac{2A + 4B + 2p}{p \cdot \min\{2 - A + B, 1\}} + \frac{2A + 4B + 2p}{p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{2A + 4B + 2p}{p} \cdot \left[1 + \frac{2}{\min\{2 - A + B, 1\}}\right].$$

Podemos, portanto, concluir que a cooperação pode surgir em duopólios com horizonte finito, bastando para isso que exista uma probabilidade de que a empresa concorrente não se comporte de forma racional, preferindo seguir uma regra prática com resultados comprovados.

Com este resultado concluímos este estudo sobre duopólios baseado no dilema do prisioneiro, que partiu do caso mais simples até ao jogo dinâmico de informação incompleta, passando por jogos dinâmicos de informação perfeita e imperfeita, nos quais foram derivadas as condições que determinam se as empresas cooperam ou competem.

References

1. Aumann, R. and Hart, S. (eds.) (1992), *Handbook of Game Theory*, Amsterdam: North-Holland, 1992.

2. Bertrand, J. (1883), *Théorie mathematique de la richesse sociale*, Journal des Savants, pp. 499-508.

3. Church, J. and Ware, R. (2000), *Industrial Organization - A Strategic Approach*, Boston: McGraw-Hill, 2000.

4. Cournot, A. (1838), *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses*, English edition: Macmillan, 1897.

5. Gibbons, R. (1992), *A Primer in Game Theory*, New York: Harvester Wheatsheaf, 1992.

6. Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991), *Game Theory*, Cambridge: MIT Press, 1991.

7. Hargreaves Heap, S.P. and Varoufakis, Y. (1995), *Game Theory - a critical introduction*, London: Routledge, 1995.

8. Kreps, D., Milgrom, P., Roberts, J. and Wilson, R. (1982), *Rational Cooperation in the Finitely Repeated Prisioners' Dilemma*, Journal of Economic Theory, 27, pp. 245-252.

9. Mailath, G. (1998), *Do People Play Nash Equilibrium? Lessons from Evolutionary Game Theory*, Journal of Economic Literature, XXXVI, 3 (Sep. 1998), pp. 1347-1374.

10. Moulin, H. (1981), *Deterrence and Cooperation*, European Economic Review, 15, 2 (Feb. 1981), pp. 179-193.

11. Neyman, A. (1999), *Cooperation in repeated games when the number of stages is not commonly known*, Econometrica, 67, 1 (Jan. 1999), pp. 45-64.

12. Rasmusen, E. (2001), *Games and Information - An Introduction to Game Theory*, 3rd ed., Blackwell, 2001.

13. Rasmusen, E. (2001), *Readings in Games and Information*, Blackwell, 2001.

14. Schotter, A. and Schwdiauer, G. (1980), *Economics and the Theory of Games: A Survey*, Journal of Economic Literature, XVIII (Jun. 1980), pp. 479-527.

15. Selten, R. (1999), *Game Theory and Economic Behaviour - Selected Essays*, Cheltenham: Edward Elgar, 1999.

16. Shubik, M. (1980), *Market Structure and Behavior*, Cambridge: Harvard University Press, 1980.

17. Thomson, W. (1999), *The Young Person's Guide to Writing Economic Theory*, Journal of Economic Literature, XXXVII (Mar. 1999), pp. 157-183.

18. Tirole, J. (1988), *The Theory of Industrial Organization*, Cambridge: MIT Press, 1988.

19. Vega-Redondo, F. (2003), *Economics and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 2003.

20. Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, 3rd ed., Princeton University Press, 1953.